Procesy stochastyczne — zadania przygotowujące do II kolokwium (część I)

Zadanie 1 Rozważmy ciąg niezależnych rzutów parą prawidłowych monet. Niech X_n oznacza liczbę orłów w n rzutach. Wykaż, że ciąg $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2 (Model dyfuzji Bernoulliego-Laplace'a) k kul białych i k kul czarnych umieszczono w dwu pudełkach, po k kul w każdym. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 3 Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o danej macierzy przejścia. Znajdź średnie czasy powrotu i rozkłady stacjonarne.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4 Pierwszy wiersz macierzy przejścia P ma postać $\{p_1, p_2, ...\}$. W pozostałych wierszach $p_{j,j-1} = 1$, a pozostałe wyrazy są zerami. Przedyskutować charakter tego łańcucha i znaleźć rozkład stacjonarny, jeżeli taki istnieje.

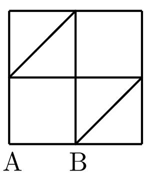
Zadanie 5 Pierwsza kolumna macierzy przejścia P ma postać $\{q_0, q_1, ...\}$ i $p_{i,i+1} = 1 - q_i$ dla $i = 0, 1, 2, ...$. Udowodnić, że wszystkie stany są chwilowe wtedy i tylko wtedy gdy $\sum q_i < \infty$. Kiedy są one stanami powracającymi zerowymi? Znaleźć rozkład stacjonarny, jeżeli on istnieje.

Zadanie 6 Rozważmy łańcuchy Markowa o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, ...\}$ i macierzach przejścia P zadanych następująco:
a) $p_{i,0} = \frac{i+1}{i+2}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{1}{i+2}$ dla $i = 0, 1, 2, ...$; b) $p_{i,0} = \frac{1}{i+2}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{i+1}{i+2}$ dla $i = 0, 1, 2, ...$.
Znajdź rozkłady stacjonarne tych łańcuchów.

Zadanie 7 Niech łańcuch Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, ...\}$ ma macierz przejscia postaci: $p_{0n} = C \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, $n = 1, 2, ...$, $C^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $p_{n,n-1} = 1$. Dla jakich α łańcuch składa się ze stanów powracających zerowych?

Zadanie 8 (Jeden ekran odbijający) Rozpatrzmy macierz błądzenia przypadkowego z $p_{k,k+1} = p$, $p_{k,k-1} = q$ dla $k = 2, 3, ...$ i $p_{12} = p$, $p_{11} = q$. Udowodnić, że wszystkie stany są chwilowe jeżeli $p > q$, powracające zerowe jeżeli $p = q$ i ergodyczne jeżeli $p < q$. Znaleźć rozkład stacjonarny.

Zadanie 9 Rozważmy symetryczne błądzenie losowe na przedstawionym grafie.



Znajdź wartość oczekiwaną:
a) czasu pierwszego powrotu do A,
b) liczby wizyt w B przed powrotem do A.