Procesy stochastyczne — zadania przygotowujące do II kolokwium (część II)

Zadanie 10 Mamy szachownicę 6×6, na której porusza się dana figura szachowa. Jaki jest średni czas powrotu danej figury do rogu, jeśli jest to: a) król, b) hetman, c) goniec, d) konik, e) wieża? Jaka jest średnia liczba kroków potrzebnych aby dane dwie figury spośród wymienionych poprzednio, które startują równocześnie z danego rogu ponownie się w nim spotkały?

Zadanie 11 Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2\}$ i macierzy przejścia:

$$a) \;\; P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad b) \;\; P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Korzystając z wartości i wektorów własnych oblicz P^n. Następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny i średni czas powrotu μ_i do staniu i dla $i = 1, 2$.

Zadanie 12 Niech $\{N_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem narodzin z intensywnościami $\lambda_0 = 1$, $\lambda_n = 2$ dla $n \geqslant 1$ oraz $N_0 = 0$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej N_t dla ustalonego $t > 0$, tzn. wyliczyć $P(N_t = i) = p_i(t)$ dla $i \geqslant 0$ korzystając z równań w przód i funkcji tworzącej.

Zadanie 13 Niech $N = \{N_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem narodzin z intensywnościami $\lambda_n = n^s$ dla $n \geqslant 0$ oraz $N_0 = 0$. Dla jakich s proces N jest eksplodujący, a dla jakich naturalny?

Zadanie 14 Samochody jadą drogą $N1$ i $N2$ zgodnie z rozkładem Poissona z częstotliwością odpowiednio 3 i 5 na minutę. Oblicz:
1) Oczekiwaną długość czasu po którym przez skrzyżowanie dróg $N1$ i $N2$ przejedzie 100 samochodów.
2) Prawdopodobieństwo, że w ciągu 3 minut przez skrzyżowanie dróg $N1$ i $N2$ przejedzie 20 samochodów.

Zadanie 15 Niech $\{N_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem narodzin z intensywnościami $\lambda_n = 2 + (-1)^n$. Wyliczyć $P(N_t = 2)$ dla dowolnego $t > 0$.

Zadanie 16 Niech $\{X_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t : t \geqslant 0\}$.
b) Znaleźć rozkład stacjonarny.
c) Znaleźć łańcuch skoków procesu X.

Zadanie 17 Niech $\{P_t = p_{ij}(t) : t \geqslant 0\}$ będzie daną półgrupą procesu Markowa X na przeliczalnej przestrzeni stanów. Oblicz $P(X_3 = 1 \mid X_5 = 2,\; X_4 = 1,\; X_0 = 2)$.