Procesy stochastyczne — dodatkowe zadania przed egzaminem

Zadanie 1 Niech W będzie procesem Wienera. Wykazać, że procesy otrzymane za pomocą następujących transformacji są procesami Wienera:

a) $Y_t = \begin{cases} tW_{1/t} & \text{dla} \quad t > 0, \\ 0 & \text{dla} \quad t = 0. \end{cases}$

b) $B_t = \begin{cases} W_t & \text{dla} \quad t \leqslant T, \\ 2W_T - W_t & \text{dla} \quad t > T. \end{cases}$

Zadanie 2 Niech W_t, $t \in [0,1]$ będzie procesem Wienera. Wykazać, że wówczas

$$B_t = (1+t)\Big(W_{t/(1+t)} - \frac{t}{t+1} W_1\Big), \qquad t \in [0, \infty)$$

jest procesem Wienera na $[0, \infty)$.

Zadanie 3 Znajdź rozkład zmiennej $4W_2 - W_4 + W_6$.

Zadanie 4 Dla jakich parametrów a i b zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

Zadanie 5 Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera. Wyznacz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję procesów:

a) $X_t = W_{t+L} - W_t$, gdzie L — stała dodatnia;

b) $X_t = At + W_t$, gdzie A — stała dodatnia,

c) $X_t = At + W_t$, gdzie A zmienna losowa niezależna od W_t o rozkładzie $N(m, \sigma)$.

Zadanie 6 Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla następujących procesów:

a) mostu Browna: $X_t = W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$;

b) ruchu Browna z dryfem: $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \geqslant 0$;

c) geometrycznego ruchu Browna: $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}$, $t \geqslant 0$;

d) kolorowego szumu: $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}$, $t \geqslant 0$, $h > 0$ — ustalone;

e) procesu Ornsteina-Uhlenbecka: $X_t = e^{-t} W_{e^{2t}}$, $t \geqslant 0$.