Zadania z procesów stochastycznych

1. Rozwiązać równanie różnicowe

$$2a_{k+2} - 3a_{k+1} + a_k = k + 2.$$

2. Niech T będzie czasem absorpcji błądzenia losowego z ekranami pochłaniającymi w 0 i N startującego z punktu k, gdzie $0 < k < N$. Udowodnić
a) $P(T < \infty) = 1$,
b) $\mathbf{E}T^n < \infty$ dla dowolnego $n \geqslant 1$.

3. Niech $\{S_n\}$ będzie błądzeniem losowym z barierami pochłaniającymi w 0 i N, zaś T oznacza czas absorpcji. Określmy zdarzenie

$$W - \text{błądzenie losowe zostało zaabsorbowane w punkcie } 0.$$

Oznaczmy

$$p_k := P(W \mid S_0 = k).$$

a) Udowodnić wzór

$$P(X_1 = 1 \mid S_0 = k, W) = p\frac{p_{k+1}}{p_k} \quad \text{dla} \quad 0 < k < N.$$

b) Wyprowadzić równanie różnicowe na średnie trwanie błądzenia pod warunkiem zdarzenia W, tzn. równanie dla

$$J_k := \mathbf{E}(T \mid S_0 = k, W).$$

c) Rozwiązać uzyskane równanie dla przypadku $p = q = \frac{1}{2}$.

4. Jak zmieni się równanie z zadania 3 jeśli błądzenie losowe będzie postaci

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n = 1, 2, ...,$$

gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie:

$$P(X = 1) = p,\ P(X = -1) = q,\ P(X = 0) = r, \quad p, q, r > 0,\ p + q + r = 1?$$

5. Gracz A wygrywa z graczem B jeśli w ciągu rzutów monetą m orłów pojawi się wcześniej n reszek (w sumie, niekoniecznie pod rząd). Oznaczmy przez $p_{m,n}$ prawdopodobieństwo, że A wygra grę. Wyprowadzić równanie różnicowe dla ciągu $p_{m,n}$.

6. Niech $\{S_n\}$ będzie błądzeniem losowym z ekranami pochłaniającymi w 0 i N. Niech T będzie czasem absorpcji, X liczbą kroków w górę przed absorpcją, zaś W zdarzeniem oznaczającym absorpcję w 0. Oznaczmy

$$p_k := P(W \mid S_0 = k)$$
$$D_k := \mathbf{E}(T \mid S_0 = k)$$

Udowodnić, że zachodzi równość

$$\mathbf{E}(X \mid S_0 = k) = \frac{1}{2}\Big(D_k - k + N(1 - p_k)\Big).$$