Zadania z procesów stochastycznych

W poniższych zadaniach $\{S_n\}$ oznacza symetryczne błądzenie losowe startujące z zera.

7. Oznaczmy przez $f_b(n)$ prawdopdobieństwo, że błądzenie dochodzi do punktu $b > 0$ po raz pierwszy w chwili n. Korzystając ze wzoru

$$f_b(n) = P(M_{n-1} = S_{n-1} = b - 1,\ S_n = b),$$

udowodnić że $f_n(b) = \frac{b}{n} P(S_n = b)$.

8. Niech T oznacza czas pierwszego powrotu błądzenia losowego do zera, tzn.

$$T := \min\{n \geqslant 1 : S_n = 0\}.$$

Wyprowadzić wzór:

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$

Wywnioskować stąd, że $\mathbf{E}T^\alpha < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha < \frac{1}{2}$.
(Wsk. wzór Stirlinga: $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

9. Wyprowadzić wzór:

$$P(M_n = r) = P(S_n = r) + P(S_n = r + 1), \qquad r \geqslant 0.$$

10. Udowodnić, że prawdopdobieństwo, że pierwsze dojście błądzenia losowego do punktu S_{2n} nastąpi w chwili $2k$ jest równe

$$P(S_{2k} = 0) \cdot P(S_{2n-2k} = 0) \qquad \text{dla } 0 \leqslant k \leqslant n.$$