Zadania z procesów stochastycznych

11. Niech $\{S_n\}$ będzie błądzeniem losowym takim, że $S_0 = 0$ oraz $p < \frac{1}{2}$. Zdefiniujmy

$$M := \max\{S_n : n \geqslant 0\}.$$

Udowodnić wzór

$$P(M \geqslant r) = \left(\frac{p}{q}\right)^r \quad \text{dla } r \geqslant 1.$$

12. Cząsteczka porusza się po rogach kwadratu ABCD, przy czym prawdopdobieństwo przejścia z rogu A do B oznaczone jest przez p_{AB} (dla pozostałych rogów analogicznie). Zakładamy, że zachodzą związki:

$$p_{AB} = p_{BA} = p_{DC} = p_{CD} = \alpha, \quad p_{AD} = p_{DA} = p_{BC} = p_{CB} = \beta,$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Niech $p_{AA}(n), n \geqslant 0$ oznacza prawdopodobieństwo, że cząstka startująca z rogu A w chwili n znowu będzie w A. Udowodnić, że funkcja tworząca ciągu $\{p_{AA}(n)\}$ dana jest wzorem

$$G_A(s) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-s^2} + \frac{1}{1- \mid \beta - \alpha \mid^2 s^2}\right\}.$$

13. Cząsteczka porusza się na płaszczyźnie startując z punktu $(0, 0)$ i przechodząc w górę, w dół, w prawo lub w lewo z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Położenie cząsteczki w chwili n oznaczymy (X_n, Y_n). Niech T oznacza czas pierwszego dojścia cząsteczki do prostej o równaniu: $x+y = m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, zaś (X, Y) punkt w chwili dojścia, tzn. $(X, Y) = (X_T, Y_T)$. Wyznaczyć funkcje tworzące dla zmiennej T oraz $X - Y$.

14. Udowodnić, że dla symetrycznego błądzenia losowego startującego z zera zachodzą wzory :

$$a) \quad 2kf_0(2k) = P(S_{2k-2} = 0) \quad \text{dla } k \geqslant 1,$$

$$b) \quad P(S_1 S_2 \cdot ... \cdot S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0) \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Wsk. Można pokazać równość funkcji tworzących.

15. Korzystając z zadania 14, udowodnić, że dla symetrycznego błądzenia losowego startującego z zera zachodzą równości

$$\mathbf{E}(\min\{T, 2m\}) = 2\mathbf{E} \mid S_{2m} \mid = 4mP(S_{2m} = 0) \quad \text{dla } m \geqslant 0,$$

gdzie $T := \min\{n > 0 : S_n = 0\}$.
Wsk. Można pokazać równość funkcji tworzących.