Zadania z procesów stochastycznych

16. Niech $\{Z_n\}$ będzie procesem gałązkowym o danych parametrach: $\mathbf{E}Z_1 = \mu \neq 1$, $VarZ_1 = \sigma^2 > 0$. Wyprowadzić wzór na kowariancję liczebności populacji w chwilach n i m, gdzie $m \leqslant n$, tzn. $Cov(Z_n, Z_m)$.

17. Niech $\{Z_n\}$ będzie procesem gałązkowym, w którym dany jest rozkład zmiennej Z_1:

$$P(Z_1 = k) = p^k q; \quad k = 0, 1, ...,$$

gdzie $p, q > 0$, $p + q = 1$. Niech T oznacza czas wyginięcia populacji, tzn.

$$T := \min\{n : Z_n = 0\}.$$

Wyznaczyć $P(T = n)$ dla $n = 1, 2, ...$.

18. Niech $\{Z_n\}$ będzie procesem gałązkowym, w którym zmienna Z_1 ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Udowodnić, że prawdopodopieństwo wyginięcia populacji spełnia warunki:

a) jeśli $\lambda \leqslant 1$ to wówczas $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = 1$.

b) jeśli $\lambda > 1$ to wówczas $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \alpha < 1$, gdzie α jest liczbą spełniającą warunek $\lambda = \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1}$.

19. Niech $\{Z_n\}$ będzie procesem gałązkowym, w którym dany jest rozkład zmiennej Z_1:

$$P(Z_1 = k) = \frac{1}{2^{k+1}}; \quad k = 0, 1, ...$$

Oznaczmy przez V_1 liczbę pokoleń, w których populacja liczy tylko jednego osobnika, tzn.

$$V_1 := \sharp\{n : Z_n = 0\}.$$

Udowodnić, że $\mathbf{E}V_1 = \frac{1}{6}\pi^2$.

20. Niech $\{Z_n\}$ będzie procesem gałązkowym z funkcją generującą dla zmiennej Z_1 daną wzorem

$$G(s) = 1 - \alpha(1 - s)^\beta,$$

gdzie $0 < \alpha, \beta < 1$. Wyprowadzić wzór na funkcję generującą dla dowolnej zmiennej Z_n , $n = 2, 3, ...$.