

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 4 II 2015.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błędzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = q$ i $P(X_i = 0) = r$ ($p, q, r > 0$, $p + q + r = 1$) z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki: a) obie bariery są pochłaniające, b) obie bariery są odbijające, c) w 0 jest bariera odbijająca, a w 3 pochłaniająca.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- c) Obliczyć $P(X_5 = 1 \mid X_7 = 3, X_0 = 2, X_2 = 2, X_3 = 3)$.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera, zaś $a, b, h > 0$ — ustalonymi stałymi. Wyznacz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję procesu $Z_t = aX_t + bY_t$ ($t \geq 0$), gdzie X_t jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$, zaś Y_t kolorowym szumem $Y_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 4 II 2015.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błędzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = -1) = q$ i $P(X_i = 0) = r$ ($p, q, r > 0$, $p + q + r = 1$) z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki: a) obie bariery są pochłaniające, b) obie bariery są odbijające, c) w 0 jest bariera odbijająca, a w 3 pochłaniająca.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- c) Obliczyć $P(X_5 = 1 \mid X_7 = 3, X_0 = 2, X_2 = 2, X_3 = 3)$.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera, zaś $a, b, h > 0$ — ustalonymi stałymi. Wyznacz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję procesu $Z_t = aX_t + bY_t$ ($t \geq 0$), gdzie X_t jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka $X_t = e^{-t}W_{e^{2t}}$, zaś Y_t kolorowym szumem $Y_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}$.