Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 1. 1 grudnia 2014 roku. Zestaw A

Zadanie 1. (10 punktów) Znajdź rozwiązanie równania różnicowego

$$a_{k+3} + a_{k+2} - a_{k+1} - a_k = 6, \quad a_0 = 3, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 15.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do S_{6n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_k > 1$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n-2$,
b) $S_k \leqslant -1$ dla $2n+1 < k < 4n-1$,
c) $S_k > 0$ dla $4n+1 < k < 6n$,
d) $S_{6n} = 4$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 4$ gra do momentu bankructwa lub do uzbierania (albo też przeskoczenia) sumy $N = 8$. W każdej grze gracz nie zmienia swego posiadania z prawdopodobieństwem $p = \frac{2}{5}$, wygrywa 4 z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{5}$ i przegrywa 2 z prawdopodobieństwem $r = \frac{2}{5}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz zbankrutuje.
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Niech $\{Z_n\colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma następujący rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{6}$, $P(Z_1 = 1) = \frac{1}{3}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{1}{2}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ procesu gałązkowego Z_n dla $n = 1, 2$.
c) Oblicz $P(T = 2)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0\colon Z_n = 0\}$).

Życzę powodzenia! Sławomir Michalik

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 1. 1 grudnia 2014 roku. Zestaw B

Zadanie 1. (10 punktów) Znajdź rozwiązanie równania różnicowego

$$a_{k+3} - a_{k+2} - a_{k+1} + a_k = 4, \quad a_0 = 5, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 13.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do S_{6n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_k \leqslant -3$ dla $3 \leqslant k \leqslant 2n-3$,
b) $S_k > 0$ dla $2n+1 < k < 4n-1$,
c) $S_k < 0$ dla $4n+1 < k < 6n$,
d) $S_{6n} = -2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Na płaszczyźnie siedzi pająk w punkcie $(0, k)$, $k = 2$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Pająk w kolejnych momentach czasu zachowuje się w następujący sposób: nie zmienia swojego położenia z prawdopodobieństwem $p = \frac{5}{8}$, przechodzi o jeden w górę z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ i o 2 w dół z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{8}$. Obserwujemy spacer pająka do momentu gdy osiągnie on położenie $N = 4$ lub osiągnie lub przeskoczy położenie zerowe.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że pająk osiągnie położenie $N = 4$.
b) Oblicz średni czas trwania spaceru pająka.

Zadanie 4. (15 punktów) Niech $\{Z_n\colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma następujący rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{6}$, $P(Z_1 = 1) = \frac{1}{2}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{1}{3}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ procesu gałązkowego Z_n dla $n = 1, 2$.
c) Oblicz $P(T = 2)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0\colon Z_n = 0\}$).

Życzę powodzenia! Sławomir Michalik