Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 2. 26 stycznia 2015 r. Zestaw A

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech Y_n będzie ostatnią cyfrą liczby $4(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa X o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów bedących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu. Oblicz P^n i sprawdź poprawność twierdzenia ergodycznego dla łańcucha X.

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{N_t \colon t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = n$ $(n \geqslant 1)$ na godzinę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 5 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód.

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 2. 26 stycznia 2015 r. Zestaw B

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech Y_n będzie ostatnią cyfrą liczby $2(X_1^3 + \cdots + X_n^3)$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa X o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów bedących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu. Oblicz P^n i sprawdź poprawność twierdzenia ergodycznego dla łańcucha X.

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{N_t \colon t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2-(-1)^n$ $(n \geqslant 1)$ na godzinę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdą 4 zdarzenia?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód.

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik