Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 2. 27 stycznia 2015 r. Zestaw A

Zadanie 1. (15 punktów) Niech X_i bedzie sumą oczek wyrzuconych 2 kostkami w i-tej serii, zaś Y_n będzie ostatnią cyfrą liczby $2(X_1 \cdot \dots \cdot X_n)$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa X o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów bedących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2 \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+2}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{2}{i+2}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 4. (10 punktów) Przypuśćmy, że na przystanku zatrzymują się autobusy linii A i B. Podjeżdżają one na przystanek zgodnie z rozkładem Poissona z intensywnościami odpowiednio 4 i 5 razy na godzinę. Jaka jest oczekiwana długość czasu po którym na przystanek podjedzie 20. autobus? Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 2 godzin przyjedzie dokładnie 7 autobusów?

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 2. 27 stycznia 2015 r. Zestaw B

Zadanie 1. (15 punktów) Niech X_i bedzie iloczynem oczek wyrzuconych 2 kostkami w i-tej serii, zaś $Y_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n \bmod 4$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa X o macierzy przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów bedących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2 \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{2i+3}{(i+2)^2}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{(i+1)^2}{(i+2)^2}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 4. (10 punktów) Przypuśćmy, że na dworcu kolejowym zatrzymują się pociągi podmiejskie linii $S1$ i $S2$. Jeżdżą one zgodnie z rozkładem Poissona z intensywnościami odpowiednio 3 i 2 razy na godzinę. Jaka jest oczekiwana długość czasu po którym na dworzec przyjedzie ósmy pociąg? Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 4 godzin przyjedzie dokładnie 15 pociągów?

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik