Procesy stochastyczne — zadania przygotowujące do I kolokwium (część II)

Zadanie 9 Gracz z kapitałem początkowym $k = 5$ złotych gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 12$ złotych. W każdej grze wygrywa 1 złoty z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{4}$, przegrywa 1 złoty z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub też gra kończy się remisem (wtedy nic nie traci ani nie zyskuje) z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{2}$. Oblicz:
a) prawdopodobieństwo ruiny gracza,
b) średni czas trwania gry.

Zadanie 10 Na płaszczyźnie siedzi mucha w punkcie $(0, 3)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas, a druga położenie. Mucha przechodzi w kolejnych momentach czasu o 2 w górę lub 1 w dół, z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha kiedykolwiek znajdzie się w położeniu zerowym.

Zadanie 11 Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wiedząc, że $Z_1 = 5$ obliczyć prawdopodobieństwo, że liczebność populacji w pierwszych n okresach będzie stała, tzn. $P(Z_1 = Z_2 = ... = Z_n \mid Z_1 = 5)$.

Zadanie 12 Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma rozkład dwumianowy z parametrami $p = \frac{1}{2}$, $n = 2$. Niech T oznacza moment wyginięcia populacji, tzn. $T := \min\{n \geqslant 0 : Z_n = 0\}$. Obliczyć $P(T = 2)$.

Zadanie 13 W rodzinie jest k synów z prawdopodobieństwem $p_0 = 0,5$, $p_k = 0,2 \cdot (0,6)^{k-1}$ $(k = 1, 2, ...)$. Obliczyć prawdopodobieństwo wymarcia linii męskiej.

Zadanie 14 Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia dla następujących procesów gałązkowych, gdzie dana jest funkcja tworząca g liczby potomków:
a) $g(s) = p_0 + p_1 s$, $p_0 + p_1 = 1$, $0 < p_0 < 1$;
b) $g(s) = p_0 + p_2 s^2$, $p_0 + p_2 = 1$, $0 < p_0 < 1$.

Zadanie 15 Rozważmy pewną społeczność, w której każdy człowiek ma dokładnie dwójkę dzieci. Każde z dzieci jest z równym prawdopodobieństwem chłopcem lub dziewczynką. Wykaż, że męska linia wyginie z prawdopodobieństwem $q = 1$. Wykaż, że prawdopodobieństwo wymarcia męskiej linii jest równe $q = \sqrt{5} - 2$ w przypadku, gdy każdy człowiek ma trójkę dzieci zamiast dwójki.

Zadanie 16 Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$ a Z_1 ma rozkład geometryczny

$$P(Z_1 = k) = \frac{1}{2^{k+1}}; \qquad k = 0, 1, ...$$

Oznaczmy przez V_r liczbę pokoleń, w których populacja liczy dokładnie r osobników, tzn $V_r := |\{n : Z_n = r\}|$. Wykaż, że $E(2V_2 - V_3) = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{90}\pi^4$.