Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 24 listopada 2015 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = 0$ spełniających jednocześnie obydwa poniższe warunki:

1. $S_k \leqslant -2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n-2$,
2. $S_k > 0$ dla $2n < k < 4n$.

Zadanie 2. (20 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 100$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 500$ zł. W każdej grze wygrywa 100 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$, przegrywa 100 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 500 zł,
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{Z_n \colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że funkcją generującą dla Z_1 jest $G(s) = 1 - \frac{\sqrt[3]{1-s}}{3}$.
a) Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej Z_n i wariancję zmiennej losowej Z_1.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ dla Z_n.
d) Oblicz $P(T = n)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 \colon Z_n = 0\}$).

Procesy stochastyczne z zastosowaniami
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 24 listopada 2015 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{8n} = 0$ spełniających jednocześnie obydwa poniższe warunki:

1. $S_k \leqslant -2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 4n-2$,
2. $S_k > 0$ dla $4n < k < 8n$.

Zadanie 2. (20 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 20$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 50$ zł. W każdej grze wygrywa 10 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{2}{5}$, przegrywa 10 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{5}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{2}{5}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 50 zł,
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{Z_n \colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że funkcją generującą dla Z_1 jest $G(s) = 1 - \frac{\sqrt{1-s}}{2}$.
a) Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej Z_n i wariancję zmiennej losowej Z_1.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ dla Z_n.
d) Oblicz $P(T = n)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 \colon Z_n = 0\}$).