# Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
# Kolokwium numer 1. Zestaw A. 24 listopada 2015 r.

**Zadanie 1.** (10 punktów) Niech $\{S_k : k \geqslant 0\}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym startującym w zerze. Oblicz prawdopodobieństwo, że błądzenie to będzie spełniać jednocześnie następujące warunki:
$S_k > -2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n$,
$S_{2n} = 2$,
$S_k > 2$ dla $2n < k < 4n$,
$S_{4n} = 8$.

**Zadanie 2.** (20 punktów) Na płaszczyźnie siedzi mucha w punkcie $(0, k)$, $k = 3$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Mucha w kolejnych momentach czasu zachowuje się w następujący sposób: nie zmienia swojego położenia z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$, przechodzi o jeden w górę z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{6}$ i o 1 w dół z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{3}$. Obserwujemy spacer muchy do momentu gdy osiągnie ona położenie $N = 4$ lub osiągnie położenie zerowe $N = 0$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha osiągnie położenie $N = 4$.
b) Oblicz średni czas trwania spaceru muchy.

**Zadanie 3.** (20 punktów) Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_1$ ma rozkład $P(Z_1 = k) = \frac{1}{ek!}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.
a) Znajdź funkcją generującą dla $Z_1$ i $Z_2$.
b) Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Z_n$ i wariancję zmiennej losowej $Z_1$.
c) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
d) Oblicz $P(T = 3)$, gdzie $T$ — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 : Z_n = 0\}$).

# Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
# Kolokwium numer 1. Zestaw B. 24 listopada 2015 r.

**Zadanie 1.** (10 punktów) Niech $\{S_k : k \geqslant 0\}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym startującym w zerze. Oblicz prawdopodobieństwo, że błądzenie to będzie spełniać jednocześnie następujące warunki:
$S_k > -2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n$,
$S_{2n} = 4$,
$S_k > 4$ dla $2n < k < 4n$,
$S_{4n} = 6$.

**Zadanie 2.** (20 punktów) Na płaszczyźnie siedzi mucha w punkcie $(0, k)$, $k = 1$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Mucha w kolejnych momentach czasu zachowuje się w następujący sposób: nie zmienia swojego położenia z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$, przechodzi o jeden w górę z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{3}$ i o 1 w dół z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{6}$. Obserwujemy spacer muchy do momentu gdy osiągnie ona położenie $N = 3$ lub osiągnie położenie zerowe $N = 0$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że mucha osiągnie położenie $N = 3$.
b) Oblicz średni czas trwania spaceru muchy.

**Zadanie 3.** (20 punktów) Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_1$ ma rozkład $P(Z_1 = k) = \frac{2^k}{e^2 k!}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.
a) Znajdź funkcją generującą dla $Z_1$ i $Z_2$.
b) Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Z_n$ i wariancję zmiennych losowych $Z_1$ i $Z_2$.
c) Oblicz $P(T = 2)$, gdzie $T$ — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 : Z_n = 0\}$).