

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 2. Zestaw C. 12 stycznia 2016 r.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (10 punktów) Król i goniec poruszają się niezależnie po szachownicy startując z tego samego rogu. Jaka jest średnia liczba kroków do czasu ponownego spotkania w tym rogu, jeśli wiemy, że król porusza się tylko po jednej ćwiartce szachownicy.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzy przejścia P . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Oblicz P^n , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny (jeśli istnieje) i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/8 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{N_t : t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 2$ i $\lambda_n = 3 - (-1)^n$ ($n \geq 1$). Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 7 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami
Kolokwium numer 2. Zestaw D. 12 stycznia 2016 r.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (10 punktów) Konik i wieża poruszają się niezależnie po szachownicy startując z tego samego rogu. Jaka jest średnia liczba kroków do czasu ponownego spotkania w tym rogu, jeśli wiemy, że konik porusza się tylko po jednej ćwiartce szachownicy.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzy przejścia P . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Oblicz P^n , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny (jeśli istnieje) i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{N_t : t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 3$ i $\lambda_n = 4 + (-1)^n$ ($n \geq 1$). Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 5 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.