

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw A. 10 II 2017.

Imię i Nazwisko:

Zadanie 1. (10 punktów) Rozważmy pewną populację królików, w której każda samica rodzi dokładnie jedno małe z prawdopodobieństwem $1/3$ i dokładnie dwójkę małych z prawdopodobieństwem $2/3$. Ponadto każde małe jest z prawdopodobieństwem $3/5$ płci żeńskiej.

- a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w trzecim pokoleniu.
- c) Znajdź średnią liczbę królików płci żeńskiej w k -tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- c) Obliczyć $P(X_3 = 1 \mid X_5 = 1, X_0 = 2, X_2 = 3, X_4 = 1)$.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w \mathbb{R} . Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = 5W_{2t+3} + 3tW_{t+2} - 3W_2 \quad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw B. 10 II 2017.

Imię i Nazwisko:

Zadanie 1. (10 punktów) Rozważmy pewną populację pająków, w której każdy pająk płci żeńskiej rodzi dokładnie dwójkę małych z prawdopodobieństwem $1/2$ i dokładnie trójkę małych też z prawdopodobieństwem $1/2$. Ponadto każde małe jest z prawdopodobieństwem $2/3$ płci żeńskiej.

- a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
- c) Znajdź średnią liczbę pająków płci żeńskiej w n -tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (15 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- c) Obliczyć $P(X_4 = 1 \mid X_6 = 2, X_0 = 1, X_2 = 3, X_5 = 1)$.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w \mathbb{R} . Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = 3W_{2t+2} - tW_{t+1} + 2W_1 \quad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.