

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 21 listopada 2016 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$2a_{k+2} - 4a_{k+1} + 2a_k = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błędzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:

- a) $S_0 = 0$,
- b) $S_k \geq 2$ dla $2 \leq k \leq 2n - 2$,
- c) $S_{2n} = 4$,
- d) $S_{4n} = 0$.

Zadanie 3. (15 punktów) Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0, 0)$ a druga w $(0, 6)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Każda z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Jeśli odległość pomiędzy muchami jest równa 10 to muchy odlatują. Obliczyć prawdopodobieństwo, że muchy się spotkają.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację chomików pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem p_n , gdzie: $p_0 = \frac{1}{6}$ i $p_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{5})^{n-1}$ dla $n \geq 1$.

- a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w czwartym pokoleniu.
- c) Znajdź średnią liczbę samiczek w n -tym pokoleniu.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 21 listopada 2016 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$3a_{k+2} - 6a_{k+1} + 3a_k = -4, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błędzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:

- a) $S_0 = 0$,
- b) $S_k \geq 3$ dla $3 \leq k \leq 2n - 1$,
- c) $S_{2n} = 2$,
- d) $S_{4n} = 8$.

Zadanie 3. (15 punktów) Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0, 0)$ a druga w $(0, 4)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Każda z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Eksperyment kończy się w momencie gdy muchy się spotkają lub gdy odległość między nimi wynosi 12. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trwania eksperymentu.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację gołębi pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi k córek z prawdopodobieństwem q_k , gdzie: $q_0 = \frac{1}{3}$ i $q_k = \frac{1}{6}(\frac{3}{4})^{k-1}$ dla $k \geq 1$.

- a) Znajdź średnią liczbę samiczek w k -tym pokoleniu.
- b) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- c) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w trzecim pokoleniu.