Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 2. Zestaw C. 23 stycznia 2017 r.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = X_1^2 + ... + X_n^2 \mod 5$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n \colon n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i macierzy przejścia P. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X. Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{N_t \colon t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 3$ i $\lambda_n = 2 - (-1)^n$ $(n \geqslant 1)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 10 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik

Procesy stochastyczne z zastosowaniami
Kolokwium numer 2. Zestaw D. 23 stycznia 2017 r.

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = X_1^3 + ... + X_n^3 \mod 3$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i macierzy przejścia P. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X. Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{N_t : t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2 + (-1)^n$ $(n \geqslant 1)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 10 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik