

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 2. Zestaw A. 23 stycznia 2017 r.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (10 punktów) 4 kule białe i 4 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach, po 4 kule w każdym. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełko. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 2. (10 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+1}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{1}{i+1}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X , które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 3. (10 punktów) Przypuśćmy, że na przystanku zatrzymują się autobusy linii 86 i 98. Podjeżdżają one na przystanek zgodnie z rozkładem Poissona z intensywnościami odpowiednio 3 i 5 razy na godzinę. Jaka jest oczekiwana długość czasu po którym na przystanek podjedzie 15. autobus? Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 3 godzin przyjedzie dokładnie 12 autobusów?

Zadanie 4. (20 punktów) Niech $\{N_t : t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 2$ i $\lambda_n = 3 + (-1)^n$ ($n \geq 1$). Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 10 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik

Procesy stochastyczne z zastosowaniami
Kolokwium numer 2. Zestaw B. 23 stycznia 2017 r.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (10 punktów) 3 kule białe i 3 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach, po 3 kule w każdym. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełko. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 2. (10 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+3}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{3}{i+3}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X , które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 3. (10 punktów) Przypuśćmy, że na dworcu kolejowym zatrzymują się pociągi linii S_1 i S_2 . Podjeżdżają one na przystanek zgodnie z rozkładem Poissona z intensywnościami odpowiednio 4 i 3 razy na godzinę. Jaka jest oczekiwana długość czasu po którym na dworzec podjedzie 9. pociąg? Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 4 godzin przyjedzie dokładnie 16 pociągów?

Zadanie 4. (20 punktów) Niech $\{N_t : t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 2$ i $\lambda_n = 2^n$ ($n \geq 1$). Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 8 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Życzę powodzenia!
Sławomir Michalik