Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw A. 5 II 2018.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (6 punktów) Rozważmy pewną populację królików, w której każda samica rodzi dokładnie trójkę małych i każde małe jest z prawdopodobieństwem 3/5 płci żeńskiej.
a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia linii żeńskiej.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie linii żeńskiej nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę królików płci żeńskiej w k-tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (6 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzy przejścia P. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny (jeśli istnieje) i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (6 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{k,0} = \frac{2k+7}{k^2+8k+16}$ i $p_{k,k+1} = \frac{k^2+6k+9}{k^2+8k+16}$ dla $k = 0.1, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 4. (7 punktów) Niech $\{N_t : t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = n^2$ $(n \geqslant 1)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 5 zdarzeń?
Wskazówka: Równanie w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Zadanie 5. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(W_t^{2k})$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw B. 5 II 2018.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (6 punktów) Rozważmy pewną populację chomików, w której każda samica rodzi dokładnie trójkę małych i każde małe jest z prawdopodobieństwem 2/5 płci żeńskiej.
a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia linii żeńskiej.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie linii żeńskiej nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę chomików płci żeńskiej w n-tym pokoleniu pochodzących od jednego przodka.

Zadanie 2. (6 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzy przejścia P. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny (jeśli istnieje) i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (6 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{n,0} = \frac{2n+9}{(n+5)^2}$ i $p_{n,n+1} = \frac{(n+4)^2}{(n+5)^2}$ dla $n = 0, 1, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 4. (7 punktów) Niech $\{N_t : t \geqslant 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2n - 1$ $(n \geqslant 1)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 7 zdarzeń?
Wskazówka: Równanie w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Zadanie 5. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(W_t^{2k})$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.