Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 27 listopada 2017 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = -6 \cdot 2^n, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 6.$$

Zadanie 2. (20 punktów) Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0,0)$ a druga w $(0,8)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Pierwsza z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$. Druga z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Jeśli odległość pomiedzy muchami jest równa 12 to muchy odlatują. Obliczyć prawdopodobieństwo, że muchy się spotkają i średni czas do odlotu lub do momentu spotkania.

Zadanie 3. (20 punktów) Rozważmy pewną populację papug pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ dla $n = 0, 1, \ldots$.

a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w siódmym pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę samiczek w k-tym pokoleniu.
d) Wykaż wzór na funkcję tworzącą zmiennej losowej Z_k oznaczającej liczbę samiczek w k-tym pokoleniu.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 27 listopada 2017 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$2a_{n+2} - 4a_{n+1} - 6a_n = 8(-1)^n, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 13.$$

Zadanie 2. (20 punktów) Na płaszczyźnie siedzą dwie biedronki. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0,0)$ a druga w $(0,4)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Biedronki zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Pierwsza z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Druga z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$ lub o 1 w dół z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$. Jeśli odległość pomiedzy biedronkami jest równa 10 to biedronki odlatują. Obliczyć prawdopodobieństwo, że biedronki się nie spotkają i średnią liczbę kroków, którą musi wykonać każda z biedronek do odlotu lub do momentu spotkania.

Zadanie 3. (20 punktów) Rozważmy pewną populację świnek morskich pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi k córek z prawdopodobieństwem $p_k = \frac{2^k}{3^{k+1}}$ dla $k = 0, 1, \ldots$.

a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w szóstym pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę samiczek w N-tym pokoleniu.
d) Wykaż wzór na funkcję tworzącą zmiennej losowej Z_n oznaczającej liczbę samiczek w n-tym pokoleniu.