

Procesy stochastyczne z zastosowaniami
Kolokwium numer 2. Zestaw A. 22 stycznia 2018 r.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Z_n = 3(X_1^2 + \dots + X_n^2) \pmod 5$. Wykaż, że ciąg $\{Z_n : n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia P . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{X_t : t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Wyznaczyć półgrupę $\{P_t : t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- Obliczyć $P(X_{3t} = 1 \mid X_{5t} = 3, X_0 = 2, X_{4t} = 3, X_t = 2)$.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami
Kolokwium numer 2. Zestaw B. 22 stycznia 2018 r.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Z_n = 2(X_1^2 \cdot \dots \cdot X_n^2) \pmod 5$. Wykaż, że ciąg $\{Z_n : n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (20 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia P . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (20 punktów) Niech $\{X_t : t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Wyznaczyć półgrupę $\{P_t : t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- Obliczyć $P(X_{4t} = 2 \mid X_{3t} = 1, X_0 = 3, X_{6t} = 2, X_t = 3)$.