Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw A. 29 I 2019.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błądzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = 1/3$, $P(X_i = -1) = 1/2$ i $P(X_i = 0) = 1/6$ z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki:
a) obie bariery są pochłaniające, b) obie bariery są odbijające, c) w 0 jest bariera odbijająca, a w $N = 3$ pochłaniająca.

Zadanie 2. (7 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2 \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+3}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{3}{i+3}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t \colon t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t \colon t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 2 \mid X_5 = 1,\ X_0 = 3,\ X_2 = 3,\ X_4 = 1)$.

Zadanie 4. (8 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = 3W_{2t+1} - 2W_{t+1} - (t+1)W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw B. 29 I 2019.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błądzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = 1/3$, $P(X_i = -1) = 1/2$ i $P(X_i = 0) = 1/6$ z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki:
a) obie bariery są pochłaniające, b) obie bariery są odbijające, c) w 0 jest bariera pochłaniająca, a w $N = 3$ odbijająca.

Zadanie 2. (7 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2 \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+2}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{2}{i+2}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t \colon t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t \colon t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 3 \mid X_5 = 1,\ X_0 = 2,\ X_1 = 2,\ X_4 = 1)$.

Zadanie 4. (8 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = tW_{2t+2} - 2W_{t+1} + 2W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw A. 29 I 2019.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błądzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = 1/3$, $P(X_i = -1) = 1/2$ i $P(X_i = 0) = 1/6$ z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki:
a) obie bariery są pochłaniające, b) obie bariery są odbijające, c) w 0 jest bariera odbijająca, a w $N = 3$ pochłaniająca.

Zadanie 2. (7 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2 \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+3}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{3}{i+3}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t : t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 2 \mid X_5 = 1,\ X_0 = 3,\ X_2 = 3,\ X_4 = 1)$.

Zadanie 4. (8 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = 3W_{2t+1} - 2W_{t+1} - (t+1)W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. Zestaw B. 29 I 2019.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błądzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = 1/3$, $P(X_i = -1) = 1/2$ i $P(X_i = 0) = 1/6$ z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki:
a) obie bariery są pochłaniające, b) obie bariery są odbijające, c) w 0 jest bariera pochłaniająca, a w $N = 3$ odbijająca.

Zadanie 2. (7 punktów) Niech X będzie łańcuchem Markowa z przestrzenią stanów $S = \{0, 1, 2 \dots\}$ i macierzą przejścia P zadaną przez $p_{i,0} = \frac{i}{i+2}$ oraz $p_{i,i+1} = \frac{2}{i+2}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$. Podaj stany łańcucha X, które są chwilowe, powracające zerowe i powracające niezerowe. Znajdź rozkład stacjonarny.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t : t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t : t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 3 \mid X_5 = 1,\ X_0 = 2,\ X_1 = 2,\ X_4 = 1)$.

Zadanie 4. (8 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = tW_{2t+2} - 2W_{t+1} + 2W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.