Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 3 grudnia 2018 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = -4 \cdot 2^n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = S_{2n} = 0$,
b) $S_k \leqslant -1$ dla $1 \leqslant k \leqslant 2n-3$,
c) $S_{2n-2} = -2$,
d) $S_{4n} = 2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 2$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 5$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł i średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację papug pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{2^n}{e^2 n!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$.
a) Znajdź funkcję tworzącą dla Z_1 i Z_2, gdzie Z_k — liczba samiczek w k-tym pokoleniu.
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_1 i Z_2.
c) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
d) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 3 grudnia 2018 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3 \cdot 2^n, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = S_{2n} = 0$,
b) $S_k \geqslant 1$ dla $1 \leqslant k \leqslant 2n-4$,
c) $S_{2n-3} = 3$,
d) $S_{4n} = -2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 4$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 6$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{5}$, przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{5}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{2}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo ruiny gracza i średni czas gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację chomików pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{1}{e^1 n!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$.
a) Znajdź funkcję tworzącą dla Z_1 i Z_2, gdzie Z_k — liczba samiczek w k-tym pokoleniu.
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_1 i Z_2.
c) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
d) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 3 grudnia 2018 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = -4 \cdot 2^n, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = S_{2n} = 0$,
b) $S_k \leqslant -1$ dla $1 \leqslant k \leqslant 2n-3$,
c) $S_{2n-2} = -2$,
d) $S_{4n} = 2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 2$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 5$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$ przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł i średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację papug pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{2^n}{e^2 n!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$.
a) Znajdź funkcję tworzącą dla Z_1 i Z_2, gdzie Z_k — liczba samiczek w k-tym pokoleniu.
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_1 i Z_2.
c) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
d) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 3 grudnia 2018 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3 \cdot 2^n, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = S_{2n} = 0$,
b) $S_k \geqslant 1$ dla $1 \leqslant k \leqslant 2n-4$,
c) $S_{2n-3} = 3$,
d) $S_{4n} = -2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 4$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 6$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{5}$, przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{5}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{2}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo ruiny gracza i średni czas gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację chomików pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{1}{e^1 n!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$.
a) Znajdź funkcję tworzącą dla Z_1 i Z_2, gdzie Z_k — liczba samiczek w k-tym pokoleniu.
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_1 i Z_2.
c) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
d) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.