Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 5 II 2020.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozważmy pewną populację biedronek, w której każda biedronka płci żeńskiej rodzi dokładnie dwójkę małych z prawdopodobieństwem $1/2$ i dokładnie trójkę małych też z prawdopodobieństwem $1/2$. Ponadto każde małe jest z prawdopodobieństwem $2/5$ płci żeńskiej.
a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę biedronek płci żeńskiej w n-tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (10 punktów) Przypuśćmy, że 4 kule białe i 3 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach: 4 kule w I i 3 kule w II pudełku. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w I pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Scharakteryzuj stany tego łańcucha i podaj zbiory zamknięte nieprzywiedlne stanów. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t \colon t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t \colon t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 2 \mid X_5 = 3,\ X_0 = 1,\ X_2 = 1,\ X_4 = 2)$.

Zadanie 4. (5 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dla procesu

$$X_t = 4W_{2t+2} - 3W_{2t+1} + (t+1)W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 5 II 2020.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozważmy pewną populację biedronek, w której każda biedronka płci żeńskiej rodzi dokładnie dwójkę małych z prawdopodobieństwem $1/2$ i dokładnie trójkę małych też z prawdopodobieństwem $1/2$. Ponadto każde małe jest z prawdopodobieństwem $2/5$ płci żeńskiej.
a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę biedronek płci żeńskiej w n-tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (10 punktów) Przypuśćmy, że 4 kule białe i 3 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach: 4 kule w I i 3 kule w II pudełku. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w I pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Scharakteryzuj stany tego łańcucha i podaj zbiory zamknięte nieprzywiedlne stanów. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t \colon t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t \colon t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 2 \mid X_5 = 3,\ X_0 = 1,\ X_2 = 1,\ X_4 = 2)$.

Zadanie 4. (5 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dla procesu

$$X_t = 4W_{2t+2} - 3W_{2t+1} + (t+1)W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 5 II 2020.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozważmy pewną populację biedronek, w której każda biedronka płci żeńskiej rodzi dokładnie dwójkę małych z prawdopodobieństwem $1/2$ i dokładnie trójkę małych też z prawdopodobieństwem $1/2$. Ponadto każde małe jest z prawdopodobieństwem $2/5$ płci żeńskiej.
a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę biedronek płci żeńskiej w n-tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (10 punktów) Przypuśćmy, że 4 kule białe i 3 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach: 4 kule w I i 3 kule w II pudełku. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w I pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Scharakteryzuj stany tego łańcucha i podaj zbiory zamknięte nieprzywiedlne stanów. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t \colon t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t \colon t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 2 \mid X_5 = 3,\ X_0 = 1,\ X_2 = 1,\ X_4 = 2)$.

Zadanie 4. (5 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dla procesu

$$X_t = 4W_{2t+2} - 3W_{2t+1} + (t+1)W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 5 II 2020.

Imię i Nazwisko: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Rozważmy pewną populację biedronek, w której każda biedronka płci żeńskiej rodzi dokładnie dwójkę małych z prawdopodobieństwem $1/2$ i dokładnie trójkę małych też z prawdopodobieństwem $1/2$. Ponadto każde małe jest z prawdopodobieństwem $2/5$ płci żeńskiej.
a) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
b) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
c) Znajdź średnią liczbę biedronek płci żeńskiej w n-tym pokoleniu pochodzących od wspólnego przodka.

Zadanie 2. (10 punktów) Przypuśćmy, że 4 kule białe i 3 kule czarne umieszczono losowo w dwu pudełkach: 4 kule w I i 3 kule w II pudełku. Stan układu jest opisany przez podanie liczby kul białych w I pudełku. Przejście pomiedzy stanami odbywa się w następujący sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Wykaż, że dostaniemy jednorodny łańcuch Markowa. Znajdź jego przestrzeń stanów i macierz przejścia. Scharakteryzuj stany tego łańcucha i podaj zbiory zamknięte nieprzywiedlne stanów. Jaki jest rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t \colon t \geqslant 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t \colon t \geqslant 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S.
c) Obliczyć $P(X_3 = 2 \mid X_5 = 3,\ X_0 = 1,\ X_2 = 1,\ X_4 = 2)$.

Zadanie 4. (5 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dla procesu

$$X_t = 4W_{2t+2} - 3W_{2t+1} + (t+1)W_1 \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.