Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 2 grudnia 2019 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 4a_k = -6k - 3, \quad a_0 = 2, \ \ a_1 = 5.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = -8$ spełniających jednocześnie poniższe warunki:
$S_k < 2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n$,
$S_{2n} = -2$,
$S_k < -2$ dla $2n < k < 4n$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 2$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 5$ zł. W każdej grze przegrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$, wygrywa 2 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł.
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Niech $\{Z_n \colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{3}{4}$.
a) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ procesu gałązkowego Z_n.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_n.
d) Oblicz $P(T = n)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 \colon Z_n = 0\}$).

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 2 grudnia 2019 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} + 5a_{k+1} + 4a_k = 6k + 3, \quad a_0 = 0, \ \ a_1 = 1.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = 8$ spełniających jednocześnie poniższe warunki:
$S_k < 2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n$,
$S_{2n} = -2$,
$S_k > -2$ dla $2n < k < 4n$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 3$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 6$ zł. W każdej grze przegrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{3}$, wygrywa 2 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{6}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{2}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 6 zł.
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Niech $\{Z_n \colon n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{3}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{2}{3}$.
a) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ procesu gałązkowego Z_n.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_n.
d) Oblicz $P(T = n)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 \colon Z_n = 0\}$).

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw A. 2 grudnia 2019 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 4a_k = -6k - 3, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 5.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = -8$ spełniających jednocześnie poniższe warunki:
$S_k < 2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n$,
$S_{2n} = -2$,
$S_k < -2$ dla $2n < k < 4n$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 2$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 5$ zł. W każdej grze przegrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{2}$, wygrywa 2 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł.
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{3}{4}$.
a) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ procesu gałązkowego Z_n.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_n.
d) Oblicz $P(T = n)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 : Z_n = 0\}$).

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium numer 1. Zestaw B. 2 grudnia 2019 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} + 5a_{k+1} + 4a_k = 6k + 3, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z $S_0 = 0$ do $S_{4n} = 8$ spełniających jednocześnie poniższe warunki:
$S_k < 2$ dla $2 \leqslant k \leqslant 2n$,
$S_{2n} = -2$,
$S_k > -2$ dla $2n < k < 4n$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 3$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 6$ zł. W każdej grze przegrywa 1 zł prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{3}$, wygrywa 2 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{6}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{2}$.
a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 6 zł.
b) Oblicz średni czas trwania gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Niech $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ będzie procesem gałązkowym takim, że $Z_0 = 1$, a Z_1 ma rozkład: $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{3}$ i $P(Z_1 = 2) = \frac{2}{3}$.
a) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą $G_n(s)$ procesu gałązkowego Z_n.
b) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla Z_n.
d) Oblicz $P(T = n)$, gdzie T — moment wyginięcia populacji ($T = \min\{n \geqslant 0 : Z_n = 0\}$).