

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.

Kolokwium numer 2. Zestaw A. 29 stycznia 2020

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = X_1^2 + \dots + X_n^2 \pmod{6}$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n: n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (25 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i macierzy przejścia P . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15 punktów) Niech $\{N_t: t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2 - (-1)^n$ ($n \geq 1$) na godzinę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t godzin zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 12 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami

Kolokwium numer 2. Zestaw B. 29 stycznia 2020

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = X_1^2 + \dots + X_n^2 + n \pmod{5}$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n: n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (25 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i macierzy przejścia P . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15 punktów) Niech $\{N_t: t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2 + (-1)^n$ ($n \geq 1$) na godzinę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t godzin zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 8 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.

Kolokwium numer 2. Zestaw A. 29 stycznia 2020

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = X_1^2 + \dots + X_n^2 \pmod{6}$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n: n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (25 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i macierzy przejścia P . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15 punktów) Niech $\{N_t: t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2 - (-1)^n$ ($n \geq 1$) na godzinę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t godzin zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 12 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

Procesy stochastyczne z zastosowaniami

Kolokwium numer 2. Zestaw B. 29 stycznia 2020

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech $Y_n = X_1^2 + \dots + X_n^2 + n \pmod{5}$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n: n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (25 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i macierzy przejścia P . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha X . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz P^n , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (15 punktów) Niech $\{N_t: t \geq 0\}$ z $N_0 = 0$ będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami $\lambda_0 = 1$ i $\lambda_n = 2 + (-1)^n$ ($n \geq 1$) na godzinę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie t godzin zajdą dokładnie 2 zdarzenia. Po jakim średnio czasie zajdzie 8 zdarzeń?

Wskazówka: Skorzystać z równania w przód dla procesu narodzin: $p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t)$ z $\lambda_{-1} = 0$ i $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$.