

## Egzamin z procesów stochastycznych. Zestaw A. 22 VI 2022.

Imię i Nazwisko: .....

Numer indeksu: .....

**Zadanie 1.** (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny  $S_n$  będący uogólnieniem błędzenia losowego i zdefiniowany następująco:  $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$ , gdzie  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $P(X_i = 1) = 1/4$ ,  $P(X_i = -1) = 1/2$  i  $P(X_i = 0) = 1/4$  z barierami w zerze i dla  $N = 3$ , i takim, że  $S_0 = k$  dla pewnego  $0 < k < 3$ . Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki:

- a) obie bariery są pochłaniające,
- b) obie bariery są odbijające,
- c) w 0 jest bariera odbijająca, a w  $N = 3$  pochłaniająca.

**Zadanie 2.** (8 punktów) Pewna bakteria dzieli się w każdym pokoleniu na  $k$  nowych bakterii z prawdopodobieństwem  $p_0 = 0,5$ ,  $p_k = 0,2 \cdot (0,6)^{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Oblicz:

- a) prawdopodobieństwo, że wszyscy potomkowie danej bakterii kiedyś wymrą
- b) średnią liczbę bakterii w  $n$ -tym pokoleniu
- c) prawdopodobieństwo, że potomkowie bakterii wymrą w 2 pokoleniu.

**Zadanie 3.** (10 punktów) Niech  $\{X_t: t \geq 0\}$  będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, 3\}$  z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć półgrupę  $\{P_t: t \geq 0\}$  i znaleźć rozkład stacjonarny.
- b) Znaleźć łańcuch skoków procesu  $X$  i podać średnie czasy przebywania procesu  $X$  w każdym ze stanów z przestrzeni  $S$ .
- c) Obliczyć  $P(X_2 = 1 \mid X_5 = 1, X_0 = 3, X_1 = 2)$ .

**Zadanie 4.** (7 punktów) Niech  $W_t$  oznacza standardowy proces Wienera w  $\mathbb{R}$  oraz niech

$$X_t = 2W_{2t+1} + 4W_{t+1} - tW_t \quad (t > 0).$$

- a) Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dla procesu  $X_t$ .
- b) Czy  $X_t$  jest standardowym procesem Wienera?
- c) Znajdź rozkład zmiennej losowej  $X_t$  dla każdego ustalonego  $t > 0$ .