

Egzamin z procesów stochastycznych. Zestaw B. 22 VI 2022.

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Zadanie 1. (8 punktów) Pewna bakteria dzieli się w każdym pokoleniu na k nowych bakterii z prawdopodobieństwem $p_0 = 0,25$, $p_k = 0,3 \cdot (0,6)^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Oblicz:

- a) prawdopodobieństwo, że wszyscy potomkowie danej bakterii kiedyś wymrą
- b) średnią liczbę bakterii w n -tym pokoleniu
- c) prawdopodobieństwo, że potomkowie bakterii wymrą w 2 pokoleniu.

Zadanie 2. (10 punktów) Rozpatrzmy proces stochastyczny S_n będący uogólnieniem błędzenia losowego i zdefiniowany następująco: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, gdzie $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_i = 1) = 1/6$, $P(X_i = -1) = 1/3$ i $P(X_i = 0) = 1/2$ z barierami w zerze i dla $N = 3$, i takim, że $S_0 = k$ dla pewnego $0 < k < 3$. Znajdź macierz przejścia, określ które stany są chwilowe, powracające zerowe lub powracające niezerowe, a także znajdź rozkład stacjonarny. Rozpatrz następujące przypadki:

- a) obie bariery są pochłaniające,
- b) obie bariery są odbijające,
- c) w $N = 3$ jest bariera pochłaniająca, a w 0 odbijająca.

Zadanie 3. (10 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$ i znaleźć rozkład stacjonarny.
- b) Znaleźć łańcuch skoków procesu X i podać średnie czasy przebywania procesu X w każdym ze stanów z przestrzeni S .
- c) Obliczyć $P(X_3 = 1 \mid X_5 = 3, X_0 = 2, X_2 = 1, X_1 = 2)$.

Zadanie 4. (7 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w \mathbb{R} oraz niech

$$X_t = 4W_{3t+1} - 2W_{t+1} + 5tW_t \quad (t > 0).$$

- a) Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję dla procesu X_t .
- b) Czy X_t jest standardowym procesem Wienera?
- c) Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.