Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium I. Zestaw A. 7 kwietnia 2022 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{k+2} - 3a_{k+1} + 2a_k = -4, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = 0$,
b) $S_{2n} = -2$,
c) $S_k \leqslant -3$ dla $2n+1 \leqslant k \leqslant 4n$,
d) $S_{4n} = -4$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 6$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 9$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{2}{4}$, przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{1}{4}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{1}{4}$. Oblicz średni czas trwania gry oraz prawdopodobieństwo bankructwa.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację kanarków pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi dokładnie dwójkę małych. Każde małe jest z prawdopodobieństwem 3/4 samiczką.
a) Znajdź funkcję tworzącą liczby samiczek w pierwszym i w drugim pokoleniu
b) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
c) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
d) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję liczby samiczek w drugim pokoleniu.

Wzory, które być może się przydadzą:

- $P(M_n \geqslant r, S_n = b) = \begin{cases} P(S_n = b) & \text{dla} \quad b \geqslant r \\ (q/p)^{r-b} P(S_n = 2r - b) & \text{dla} \quad b < r. \end{cases}$
- $P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$.
- $P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$.
- $F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $F_1(s) = \frac{1-\sqrt{1-4pqs^2}}{2qs}$.
- Niech $\{Z_n\}$ dowolny proces gałązkowy. Wówczas

$$\mathrm{Var}\, Z_n = \begin{cases} n\sigma^2 & \text{dla} \quad \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & \text{dla} \quad \mu \neq 1. \end{cases}$$

- Niech Z_1 ma rozkład geometryczny z parametrami (p, q). Wówczas

$$G_n(s) = \begin{cases} \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns} & \text{dla} \quad p = q = \frac{1}{2} \\ \frac{q[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)} & \text{dla} \quad p \neq q. \end{cases}$$

Procesy stochastyczne z zastosowaniami.
Kolokwium I. Zestaw B. 7 kwietnia 2022 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Rozwiąż równanie różnicowe

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3 \cdot 2^n, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1.$$

Zadanie 2. (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błądzeniu losowym z S_0 do S_{4n} spełniających jednocześnie poniższe warunki:
a) $S_0 = S_{2n} = 0$,
b) $S_k \leqslant -1$ dla $1 \leqslant k \leqslant 2n-4$,
c) $S_{2n-3} = -3$,
d) $S_{4n} = -2$.

Zadanie 3. (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym $k = 4$ zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania $N = 6$ zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{5}$, przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{5}$ lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem $r = \frac{2}{5}$. Oblicz prawdopodobieństwo ruiny gracza i średni czas gry.

Zadanie 4. (15 punktów) Rozważmy pewną populację chomików pochodzących od jednej samiczki, w której każda samiczka rodzi n córek z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{1}{e^1 n!}$ dla $n = 0, 1, \ldots$.
a) Znajdź funkcję tworzącą dla Z_1 i Z_2, gdzie Z_k — liczba samiczek w k-tym pokoleniu.
b) Znajdź wartość oczekiwaną i wariancję dla dowolnego Z_k.
c) Znajdź prawdopodobieństwo, że wymarcie nastąpi dokładnie w drugim pokoleniu.
d) Znajdź prawdopodobieństwo wymarcia populacji.

Wzory, które być może się przydadzą:

- $P(M_n \geqslant r, S_n = b) = \begin{cases} P(S_n = b) & \text{dla} \quad b \geqslant r \\ (q/p)^{r-b} P(S_n = 2r - b) & \text{dla} \quad b < r. \end{cases}$
- $P_0(s) = 1 + P_0(s)F_0(s)$.
- $P_0(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}$.
- $F_0(s) = 1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}$.
- $F_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$.
- Niech $\{Z_n\}$ dowolny proces gałązkowy. Wówczas

$$\operatorname{Var} Z_n = \begin{cases} n\sigma^2 & \text{dla} \quad \mu = 1 \\ \frac{\sigma^2(\mu^n - 1)\mu^{n-1}}{\mu - 1} & \text{dla} \quad \mu \neq 1. \end{cases}$$

- Niech Z_1 ma rozkład geometryczny z parametrami (p, q). Wówczas

$$G_n(s) = \begin{cases} \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns} & \text{dla} \quad p = q = \frac{1}{2} \\ \frac{q[p^n - q^n - ps(p^{n-1} - q^{n-1})]}{p^{n+1} - q^{n+1} - ps(p^n - q^n)} & \text{dla} \quad p \neq q. \end{cases}$$