

**Procesy stochastyczne z zastosowaniami.**  
**Kolokwium numer 2. Zestaw A. 2 czerwca 2022**

**Zadanie 1.** (10 punktów) Niech  $X_i$  będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech  $Y_n = 2(X_1^3 + \dots + X_n^3) \bmod 10$ . Wykaż, że ciąg  $\{Y_n: n \geq 1\}$  jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

**Zadanie 2.** (20 punktów) Niech  $X$  łańcuch Markowa o przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i macierzy przejścia  $P$ . Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha  $X$ . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny. Oblicz  $P^n$ , a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Zadanie 3.** (10 punktów) Samochody przejeżdżają autostradami A1 i A2 zgodnie z rozkładem Poissona z częstotliwością odpowiednio 20 i 40 razy na minutę. Oblicz:

- 1) Prawdopodobieństwo, że w ciągu 3 minut przez skrzyżowanie A1 i A2 przejedzie 100 samochodów
- 2) Oczekiwaną długość czasu po którym przez te skrzyżowanie przejedzie 200 samochodów.

**Zadanie 4.** (10 punktów) Niech  $\{N_t: t \geq 0\}$  z  $N_0 = 0$  będzie procesem narodzin zliczającym liczbę zdarzeń z intensywnościami  $\lambda_n = 2n + (-1)^n$  ( $n \geq 0$ ). Obliczyć prawdopodobieństwo, że po czasie  $t$  zajdzie dokładnie 1 zdarzenie. Po jakim średnio czasie zajdzie 6 zdarzeń?

Równania w przód dla procesu narodzin:

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t) \quad \text{z} \quad \lambda_{-1} = 0 \quad \text{i} \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$