1 Rozwiązywanie równań wokół punktów nieosobliwych — w postaci szeregów potęgowych

Poniższy rozdział został opracowany w większości na podstawie podręcznika A. Palczewskiego [7].

Rozważmy równanie liniowe jednorodne rzędu m

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0. \tag{1.1}$$

Definicja 1.1 Punkt t_0 nazywamy *punktem nieosobliwym* równania (1.1) jeśli funkcje $a_0(t), \ldots, a_{m-1}(t)$ są analityczne w pewnym otoczeniu tego punktu.

Punkt t_0 nazywamy *punktem osobliwym* równania (1.1) jeśli funkcje $a_0(t), \ldots, a_{m-1}(t)$ mają bieguny skończonego rzędu w tym punkcie.

Punkt osobliwy t_0 nazywamy *regularnym punktem osobliwym* równania (1.1) jeśli funkcje $(t-t_0)^m a_0(t), \ldots, (t-t_0)a_{m-1}(t)$ są analityczne w pewnym otoczeniu tego punktu.

Punkt osobliwy t_0, który nie jest regularnym nazywamy *nieregularnym punktem osobliwym* równania (1.1).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do równań rzędu 2 postaci

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{1.2}$$

Uwaga 1.2 Zachodzi bliski związek pomiędzy powyższym równaniem liniowym 2 rzędu a równaniem Riccatiego

$$\dot{y} = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \tag{1.3}$$

Niech $y(t)$ będzie rozwiązaniem równania (1.3) i niech $x(t)$ spełnia $y(t) = \frac{-\dot{x}(t)}{a(t)x(t)}$. Wówczas $x(t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\ddot{x} - \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + b(t)\Big)\dot{x} + a(t)c(t)x = 0,$$

czyli równania (1.1) dla $p(t) = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - b(t)$ i $q(t) = a(t)c(t)$.

Na odwrót, jeśli $x(t)$ spełnia (1.1) to $y = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ spełnia równanie Riccatiego

$$\dot{y} = -y^2 - P(t)y - Q(t).$$

□

Stwierdzenie 1.3 (Metoda redukcji rzędu równania) *Jeżeli $x_1(t)$ jest jednym z rozwiązań równania (1.2) to drugie liniowo niezależne rozwiązanie ma postać*

$$x_2(t) = x_1(t)\int_{c_0}^{t} \frac{e^{-P(s)}}{x_1^2(s)}d\,s, \tag{1.4}$$

gdzie $P(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $p(t)$ zaś c_0 jest dowolnie wybraną stałą.

Dowód. Drugiego liniowo niezależnego rozwiązania będziemy szukać w postaci $x_2(t) = x_1(t)u(t)$. Wstawiając do równania (1.2) dostajemy równanie liniowe 1. rzędu na $\dot{u}$

$$x_1\ddot{u} + \big(2\dot{x}_1 + p(t)x_1\big)\dot{u} = 0,$$

którego rozwiązanie jest dane wzorem $\dot{u}(t) = \frac{e^{-P(t)}}{x_1^2(t)}$, gdzie $P(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $p(t)$. Stąd dostajemy (1.4) dla c_0 — dowolnie wybranej stałej. Zauważmy jeszcze, że $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są liniowo niezależne. W przeciwnym bowiem przypadku musielibyśmy mieć $x_2(t) = \text{const} \cdot x_1(t)$, czyli $u(t) = \text{const}$ i $\dot{u} = 0$, co jest sprzeczne z postacią funkcji $u(t)$. □

Pokażemy teraz metodę rozwiązywania równania (1.1) w otoczeniu punktu nieosobliwego. Zachodzi

Twierdzenie 1.4 *Jeśli t_0 jest punktem nieosobliwym równania (1.2) to istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania tego równania, analityczne w zbiorze $\{t: \ |t-t_0|<R\}$, gdzie R jest mniejszym z promieni zbieżności szeregów Taylora funkcji $p(t)$ i $q(t)$ rozwiniętych wokół t_0.*

Dowód. Dzięki liniowej zamianie zmiennych, bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć $t_0 = 0$. Rozwijając funkcje $p(t)$ i $q(t)$ w szeregi potęgowe zbieżne w kole o promieniu R (dla pewnego $R > 0$) dostajemy

$$p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \qquad q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i.$$

Rozwiązania będziemy szukać w postaci szeregu potęgowego

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i. \tag{1.5}$$

Po zróżniczkowaniu szeregu otrzymamy

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)c_{i+2}t^i \\
p(t)\dot{x} &= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)c_{i+1}t^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}(j+1)c_{j+1}\Big)t^i, \\
q(t)x &= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{i} b_{i-j}c_j\Big)t^i.
\end{aligned}$$

Wstawiając te szeregi do równania różniczkowego dostajemy

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big((i+2)(i+1)c_{i+2} + \sum_{j=0}^{i} a_{i-j}(j+1)c_{j+1} + b_{i-j}c_j\Big)t^i = 0.$$

Zatem dostajemy równania na współczynniki c_i

$$(i+2)(i+1)c_{i+2} + \sum_{j=0}^{i}(a_{i-j}(j+1)c_{j+1} + b_{i-j}c_j) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Równanie to można jednoznacznie rozwiązać dla danych wartości c_0 i c_1.

Pokażemy teraz, że niezależnie od wyboru c_0 i c_1, tak wyliczone współczynniki c_i definiują szereg potęgowy (1.5) o promieniu zbieżności R. W tym celu weźmy $r < R$ i zauważmy, że dla pewnego $M > 0$ zachodzi

$$|a_i|r^i \leqslant M, \quad |b_i|r^i \leqslant M \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdyż wyrazy szeregu zbieżnego są ograniczone i dążą do zera. Korzystając z powyższych nierówności i z równania (1.6) dostajemy oszacowanie wyrazów c_i

$$(i+2)(i+1)|c_{i+2}| \leqslant \frac{M}{r^i}\sum_{j=0}^{i}\Big((j+1)|c_{j+1}| + |c_j|\Big)r^j \leqslant \frac{M}{r^i}\sum_{j=0}^{i}\Big((j+1)|c_{j+1}| + |c_j|\Big)r^j + M|c_{i+1}|r.$$

Zdefiniujmy teraz szereg nieujemny d_i

$$d_0 = |c_0|, \quad d_1 = |c_1|, \quad (i+2)(i+1)d_{i+2} = \frac{M}{r^i}\sum_{j=0}^{i}\Big((j+1)d_{j+1} + d_j\Big)r^j + Md_{i+1}r.$$

Oczywiście $|c_i| \leqslant d_i$. Wystarczy więc wykazać, że szereg

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i \tag{1.7}$$

ma promień zbieżności r. W tym celu zauważmy, że

$$r(i+1)id_{i+1} = \frac{M}{r^{i-2}} \sum_{j=0}^{i-2} \big((j+1)d_{j+1} + d_j\big) r^j + \frac{M}{r^{i-2}}(id_i + d_{i-1})r^{i-1} + Md_i r^2 = i(i-1)d_i + Mrid_i + Md_i r^2,$$

więc

$$\frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{(i-1)i + rMi + r^2 M}{i(i+1)r}, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{i\to\infty} \left|\frac{d_{i+1}}{d_i}\right| = \frac{1}{r}.$$

Zatem szereg (1.7) ma promień zbieżności r. Z dowolności wyboru $r < R$ szereg (1.5) ma promień zbieżności R. Oznacza to, że szereg (1.5) definiuje rozwiązania równania (1.1) dla dowolnych c_0 i c_1.

Zauważmy, że $c_0 = x(0)$ i $c_1 = \dot{x}(0)$. Aby znaleźć dwa rozwiązania liniowo niezależne wystarczy więc wybrać takie dwie pary wartości $(c_0^{(1)}, c_1^{(1)})$ i $(c_0^{(2)}, c_1^{(2)})$, żeby ich wronskian był niezerowy, tzn.

$$\begin{vmatrix} c_0^{(1)} & c_1^{(1)} \\ c_0^{(2)} & c_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

W podobny sposób można wykazać odpowiednik Twierdzenia 1.4 dla równań liniowych jednorodnych rzędu m o analitycznych współczynnikach, czy — równoważnie — dla układów m równań liniowych jednorodnych rzędu 1 o analitycznych współczynnikach macierzy:

Twierdzenie 1.5 *Niech $A(t)$ będzie nieosobliwą macierzą $m \times m$ o analitycznych współczynnikach w otoczeniu punktu t_0. Wówczas istnieje m liniowo niezależnych rozwiązań układu m równań*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \text{dla} \quad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

Co więcej rozwiązania te są analityczne w zbiorze $\{t : \ |t - t_0| < R\}$, gdzie R jest najmniejszym z promieni zbieżności szeregów Taylora współczynników $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ macierzy $A(t)$, rozwiniętych wokół t_0.

Ćwiczenia

1. Stosując metodę redukcji rzędu równania znajdź rozwiązania ogólne równań
   a) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = e^{-2t}$,
   b) $t^2\ddot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = t^2$,
   c) $t\ddot{x} - \dot{x} + 4t^3 x = 0$ jeśli $x_1(t) = \sin(t^2)$.
2. Dokonaj klasyfikacji wszystkich punktów osobliwych równań
   a) $(t^2+1)(t-4)^3\ddot{x} + (t-4)^2\dot{x} + x = 0$,
   b) $t^2(t-2)\ddot{x} + 3(t-2)\dot{x} + x = 0$,
   c) $t^2(t-4)^2\ddot{x} + 3t\dot{x} - (t-4)x = 0$,
   d) $(1+4t^2)^2\ddot{x} + 6t\dot{x} - 9x = 0$.
3. Znajdź rozwiązania równań metodą rozwijania w szereg potęgowy wokół $t_0 = 0$. Na jakim zbiorze to rozwiązanie jest określone?
   a) równanie Hermite'a $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2px = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ — stała;
   b) równanie Airy'ego $\ddot{x} - tx = 0$;
   c) $(1-4t^2)\ddot{x} + 6t\dot{x} - 4x = 0$;
   d) $\ddot{x} + t\dot{x} + 3x = t^2$.

2 Rozwiązywanie równań wokół punktów regularnych osobliwych — w postaci szeregów Frobeniusa

Poniższy rozdział został opracowany w większości na podstawie podręcznika A. Palczewskiego [7]. Pewne wyliczenia pochodzą z książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [9].

Twierdzenie 2.1 (Frobeniusa) *Niech t_0 będzie regularnym punktem osobliwym równania (1.2). Załóżmy, że funkcje*

$$(t-t_0)p(t)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(t-t_0)^i,\qquad (t-t_0)^2q(t)=\sum_{i=0}^{\infty}q_i(t-t_0)^i \tag{2.1}$$

są analityczne dla $|t-t_0|<R$. Niech dalej l_1 i l_2 będą pierwiastkami równania indeksowego

$$l(l-1)+p_0l+q_0=0.$$

Dla ustalenia uwagi przypuśćmy, że jeśli l_1 i l_2 są rzeczywiste to $l_1\geqslant l_2$. Wówczas równanie (1.2) ma dwa liniowo niezależne rozwiązania w przedziale $t_0<t<t_0+R$, które mają postać:
1) jeśli $l_1-l_2\notin\mathbb{N}_0$ to

$$x_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(t-t_0)^{l_1+i},\qquad x_2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}b_i(t-t_0)^{l_2+i};$$

2) jeśli $l_1=l_2$ to

$$x_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(t-t_0)^{l_1+i},\qquad x_2(t)=x_1(t)\ln(t-t_0)+\sum_{i=0}^{\infty}b_i(t-t_0)^{l_1+i};$$

3) jeśli $l_1-l_2\in\mathbb{N}$ to

$$x_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(t-t_0)^{l_1+i},\qquad x_2(t)=cx_1(t)\ln(t-t_0)+\sum_{i=0}^{\infty}b_i(t-t_0)^{l_2+i},$$

gdzie stała c może być równa zeru.

Dowód. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $t_0=0$. Mnożąc równanie (1.2) przez t^2 i korzystając z (2.1) dostajemy

$$t^2\ddot{x}+t(p_0+p_1t+p_2t^2+\dots)\dot{x}+(q_0+q_1t+q_2t^2+\dots)x=0. \tag{2.2}$$

Rozwiązania tego równania będziemy szukać w postaci *szeregu Frobeniusa* $x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it^{i+l}$, gdzie $a_0\neq 0$. Wstawiając ten szereg do równania (2.2) i przyrównując do zera współczynniki przy potęgach t dostajemy

$$l(l-1)+p_0l+q_0=0\quad\text{dla}\quad i=0 \tag{2.3}$$

$$\big((i+l)(i+l-1)+p_0(i+l)+q_0\big)a_i+\sum_{j=1}^{i}\big(p_j(i-j+l)+q_j\big)a_{i-j}=0\quad\text{dla}\quad i=1,2,\dots \tag{2.4}$$

Z równania (2.3) możemy wyliczyć parametr l w rozwinięciu $x(t)$. Za a_0 możemy przyjąć dowolną wartość (np. 1). Aby zaś wyliczyć a_i $(i=1,2,\dots)$ musi zachodzić

$$(i+l)(i+l-1)+p_0(i+l)+q_0\neq 0. \tag{2.5}$$

Jeśli lewą stronę (2.3) oznaczymy przez $F(l)$, to lewa strona (2.5) jest równa $F(i+l)$. Zatem jednoczesne spełnianie (2.3) i (2.5) dla $i=1,2,\dots$ jest tylko możliwe jeśli l_1,l_2 — dwa pierwiastki (2.3) — nie różnią się o liczbę naturalną. Wówczas do (2.5) wstawiamy za l te pierwiastki i otrzymujemy dwa ciągi współczynników: a_i oraz b_i. W ten sposób otrzymamy dwa liniowo niezależne rozwiązania

$$x_1(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it^{l_1+i},\qquad x_2(t)=\sum_{i=0}^{\infty}b_it^{l_2+i}.$$

Ponieważ różnica $l_1 - l_2$ nie jest całkowita, to powyższe równania są liniowo niezależne. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.4 wykażemy, że szeregi definiujące rozwiązania są zbieżne dla $t \in (0, R)$. Wystarczy pokazać, że szereg $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ jest zbieżny dla $|t| < R$. W tym celu weźmy $r < R$ i zauważmy, że dla pewnego $M > 0$ zachodzi

$$|p_i| r^i \leqslant M, \quad |q_i| r^i \leqslant M \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdyż wyrazy szeregu zbieżnego są ograniczone i dążą do zera. Korzystając z powyższych nierówności i z równania (2.4) dostajemy oszacowanie wyrazów a_i (dla $l = l_1$) i b_i (dla $l = l_2$).

$$F(i+l)|a_i| \leqslant \frac{M}{r^i} \sum_{j=0}^{i-1} (j + l + 1) r^j |a_j|.$$

Zdefiniujmy teraz szereg nieujemny d_i

$$d_0 = |a_0|, \qquad |F(i+l)| d_i = \frac{M}{r^i} \sum_{j=0}^{i-1} (j + l + 1) r^j d_j.$$

Zauważmy, że

$$r|F(i+l)| d_i = |F(i+l-1)| d_{i-1} + M(i+l) d_{i-1},$$

więc

$$\frac{d_i}{d_{i-1}} = \frac{|F(i+l-1)| + M(i+l)}{r|F(i+l)|}, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{i\to\infty} \left| \frac{d_i}{d_{i-1}} \right| = \frac{1}{r}.$$

Oznacza to, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 1.4, że szeregi $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ i $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ są zbieżne dla $|t| < R$.

Załózmy teraz, że $l_1 = l_2$. Wtedy oczywiście nierówność (2.5) jest spełniona dla $i = 1, 2, \ldots$, a ze wzoru (2.4) można wyznaczyć współczynniki a_i i otrzymać rozwiązanie

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{l_1 + i}.$$

stosując metodę redukcji równania (Stwierdzenie 1.3) znajdujemy drugie liniowo niezależne rozwiązanie (1.2) w postaci

$$x_2(t) = x_1(t) u(t) = x_1(t) \int_{c_0}^{t} \frac{e^{-P(s)}}{x_1^2(s)} d\, s,$$

gdzie c_0 jest dowolnie wybraną stałą. W naszym przypadku $P(s) = p_0 \ln s + p_1 s + \frac{p_2 s^2}{2} + \frac{p_3 s^3}{3} + \ldots$, a więc

$$u(t) \quad = \quad \int_{c_0}^{t} \frac{s^{-p_0} e^{-p_1 s - \frac{p_2 s^2}{2} - \ldots}}{s^{2l_1} (\sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i)^2} d\, s = \int_{c_0}^{t} s^{-p_0 - 2l_1} g(s) d\, s = \int_{c_0}^{t} \frac{g(s)}{s} d\, s,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że równanie (2.3) można zapisać w postaci $(l - l_1)^2 = 0$, a więc $2l_1 = 1 - p_0$. Zauważmy, że $g(s)$ jest funkcją analityczną w pewnym otoczeniu zera i $g(0) = \frac{1}{a_0^2}$. Z dowolności wyboru a_0 możemy przyjąć, że $g(0) = 1$ i $g(s) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i s^i$. Mamy wówczas

$$x_2(t) = x_1(t) \int_{c_0}^{t} \frac{g(s)}{s} d\, s = x_1(t) \int_{c_0}^{t} \Big(\frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i s^{i-1} \Big) d\, s = x_1(t) \ln t + x_1(t) \Big(\tilde{c_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{i} t^i \Big) = x_1(t) \ln t + \sum_{i=0}^{\infty} h_i t^{i + l_1}.$$

Na mocy Stwierdzenia 1.3 rozwiązania $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są linowo niezależne. Podobnie jak poprzednio pokazujemy zbieżność szeregów.

Załóżmy w końcu, że $l_1 = l_2 + N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Tak jak poprzednio dostajemy rozwiązanie

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{l_1 + i},$$

gdyż nierówność (2.5) jest spełniona dla $l = l_1$ oraz $i = 1, 2, \ldots$.

Znajdziemy teraz linowo niezależne $x_2(t)$. W tym celu spróbujemy wyznaczyć współczynniki przy $l = l_2$. Ze wzoru (2.4) dostajemy w szczególności równanie

$$F(l_2 + N)a_N = -\sum_{j=1}^{N} \big(p_j(N - j + l_2) + q_j\big)a_{N-j}. \tag{2.6}$$

Ponieważ $F(l_2 + N) = 0$, więc są możliwe dwie sytuacje:
a) równanie jest spełnione — prawa strona (2.6) jest równa zeru,
b) równanie jest sprzeczne — prawa strona (2.6) jest różna od zera.

W przypadku a) możemy za a_N przyjąć dowolną wartość (ale tak, by $x_2(t)$ był niezależny od $x_1(t)$) i wyliczyć następne współczynniki (będziemy je oznaczać b_i). Otrzymamy wówczas drugie liniowo niezależne rozwiązanie

$$x_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{l_2+i}. \tag{2.7}$$

W przypadku b) nie można wyznaczyć a_N, a więc i rozwiązania w postaci (2.7). Dlatego też musimy poszukać drugiego rozwiązania metodą redukcji rzędu równania w postaci

$$x_2(t) = x_1(t)\ln t + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{i+l_2}.$$

Podobnie jak poprzednio pokazujemy zbieżność szeregów definiujących rozwiązania. □

Ćwiczenia

1. Znajdź dwa liniowo niezależne rozwiązania równań rozwijając w szereg Frobeniusa wokół $t_0 = 0$. Na jakim obszarze są one określone?
   a) $2t^2(t+1)\ddot{x} + t(7t-1)\dot{x} + x = 0$,
   b) $2t\ddot{x} + 5(1+2t)\dot{x} + 5x = 0$,
   c) $t^2\ddot{x} - t(1+t)\dot{x} + x = 0$,
   d) $t^2\ddot{x} + t(t-1)\dot{x} + (1-t)x = 0$,
   e) $t(1-t)\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$,
   f) $t\ddot{x} + (t^3-1)\dot{x} + t^2x = 0$,
   g) $t(1-t)\ddot{x} + 2(1-t)\dot{x} + 2x = 0$,
   h) $4t^2\ddot{x} + 2t(2-t)\dot{x} - (1+3t)x = 0$.

3 Badanie punktów w nieskończoności i równanie hipergeometryczne

Poniższy rozdział został opracowany w większości na podstawie książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [9].

3.1 Rozwiązania dla dużych wartości $|t|$

Zajmiemy się teraz badaniem rozwiązań równania

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{3.1}$$

przy $|t| \to \infty$. W tym celu dokonajmy zamiany zmiennych. Niech $s = \frac{1}{t}$. Wówczas

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) = -s^2\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) = \frac{d}{ds}\Big(-s^2\frac{dx}{ds}\Big)\frac{ds}{dt} = \Big(-2s\frac{dx}{ds} - s^2\frac{d^2x}{ds^2}\Big)(-s^2) = s^4\frac{d^2x}{ds^2} + 2s^3\frac{dx}{ds}.$$

Zatem równanie 3.1 przyjmie postać

$$s^4\frac{d^2x}{ds^2} + \Big(2s^3 - s^2p\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big)\frac{dx}{ds} + q\Big(\frac{1}{s}\Big)x = 0. \tag{3.2}$$

Definicja 3.1 Mówimy, że $t_0 = \infty$ jest *punktem nieosobliwym* (odpowiednio *osobliwym regularnym*, *osobliwym nieregularnym*) równania (3.1) jeśli $s_0 = 0$ jest punktem nieosobliwym (odpowiednio osobliwym regularnym, osobliwym nieregularnym) równania (3.2).

Wprost z definicji i z postaci równania (3.2) dostajemy

Stwierdzenie 3.2 *Punkt $t_0 = \infty$ jest punktem nieosobliwym równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $t \mapsto 2t - t^2p(t)$ i $t \mapsto t^4q(t)$ są analityczne w nieskończoności.*

Punkt $t_0 = \infty$ jest punktem regularnym osobliwym równania (3.1) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $t \mapsto tp(t)$ i $t^2q(t)$ są analityczne w nieskończoności.

3.2 Równanie hipergeometryczne

Zapoznamy się teraz z chyba najsłynniejszym równaniem różniczkowym zwyczajnym. Przedtem jednak wprowadźmy nowe oznaczenia skracające znacznie zapis.

Dla dowolnego a i $n \in \mathbb{N}_0$ wprowadźmy *funkcję silniową* (inaczej *symbol Pocchammera* lub *silnię Pocchammera*) oznaczaną przez $(a)_n$ lub $a^{\underline{n}}$ i zdefiniowaną wzorem

$$(a)_0 = a^{\underline{0}} = 1 \text{ dla } a \neq 0, \quad (a)_n = a^{\underline{n}} = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

W szczególności dla $a = 1$ dostajemy $(1)_n = n!$. Funkcję silniową da się również wyrazić za pomocą funkcji gamma Eulera

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}d\,t$$

wzorem

$$(a)_n = a^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Definicja 3.3 *Równaniem hipergeometrycznym* (lub *równaniem Gaussa*) nazywamy równanie liniowe 2. rzędu postaci

$$t(1-t)\ddot{x} + \big(c - (a+b+1)t\big)\dot{x} - abx = 0, \tag{3.3}$$

gdzie a, b i c są stałymi parametrami.

Zauważmy, że równanie to ma 3 punkty osobliwe — wszystkie regularne: 0, 1 i ∞. Odpowiadające im pierwiastki równania indeksowego to: 0, $1-c$; 0, $c-a-b$; a, b. Zatem rozwiązań z logarytmami należy się spodziewać:
przy $t=0$: jeśli c jest całkowite,
przy $t=1$: jeśli $a+b-c$ jest całkowite,
przy $t=\infty$: jeśli $a-b$ jest całkowite.

Znajdziemy teraz rozwiązania równania hipergeometrycznego (3.3) wokół punktu $t_0=0$. Będziemy go szukać w postaci szeregu Frobeniusa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n t^{n+l}$. Wstawiając szereg do równania (3.3) dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+l)(n+l+c-1)d_n t^{n+l-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+l+a-1)(n+l+b-1)d_{n-1}t^{n+l-1}=0.$$

Wynikają stąd następujące zależności

$$\begin{aligned}
&\text{dla } n=0: && l(l+c-1)=0\\
&\text{dla } n\geqslant 1: && (n+l)(n+l+c-1)d_n=(n+l+a-1)(n+l+b-1)d_{n-1}.
\end{aligned}$$

Zatem pierwiastki równania indeksowego są równe $l_1=0$ i $l_2=1-c$. Aby uniknąć rozwiązań typu logarytmicznego przypuśćmy, że c nie jest całkowite. Mamy wówczas dla $n\geqslant 1$

$$d_n=\frac{(l+a)(l+a+1)\cdots(l+a+n)(l+b)(l+b+1)\cdots(l+b+n)}{(l+1)(l+2)\cdots(l+n)(l+c)(l+c+1)\cdots(l+c+n-1)}d_0=\frac{(a+l)_n(b+l)_n}{(1+l)_n(c+l)_n}d_0.$$

Przyjmując $d_0=1$ dostajemy rozwiązania

$$x_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}t^n \quad \text{dla} \quad l=l_1=0 \tag{3.4}$$

$$x_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(2-c)_n n!}t^{n+1-c} \quad \text{dla} \quad l=l_2=1-c. \tag{3.5}$$

Definicja 3.4 Rozwiązanie (3.4) równania hipergeometrycznego (3.3) nazywamy *funkcją hipergeometryczną* (lub *szeregiem hipergeometrycznym*) i oznaczamy przez

$${}_2F_1(a,b;c;t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}t^n. \tag{3.6}$$

Stosując np. kryterium d'Alemberta dostajemy, że szereg hipergeometryczny jest zbieżny dla $|t|<1$.

Zauważmy, że również drugie rozwiązanie da się wyrazić za pomocą funkcji hipergeometrycznej:

$$x_2(t)=t^{1-c}{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;t).$$

Również rozwiązania równania hipergeometrycznego (3.3) wokół innych punktów osobliwych dadzą się wyrazić za pomocą funkcji (3.6). W przypadku rozwiązań bez logarytmów mają one postać:
— w otoczeniu punktu $t_0=1$:

$$y_1(t)={}_2F_1(a,b;a+b+1-c;1-t), \qquad y_2(t)=(1-t)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c+1-a-b;1-t); \tag{3.7}$$

— w otoczeniu $t_0=\infty$:

$$z_1(t)=t^{-a}{}_2F_1(a,a-c+1;a-b+1;\frac{1}{t}), \qquad z_2(t)=t^{-b}{}_2F_1(b,b-c+1;b-a+1;\frac{1}{t}). \tag{3.8}$$

Równanie hipergeometryczne jest szczególnym przykładem *równań Fuchsa*, czyli takich równań, dla których wszystkie punkty (wraz z ∞) są nieosobliwe lub regularne osobliwe.

Poznamy teraz ogólną postać równań Fuchsa o trzech punktach regularnych osobliwych

Stwierdzenie 3.5 *Niech równanie (3.1) będzie równaniem Fuchsa z dokładnie 3 punktami osobliwymi regularnymi: a, b, c. Niech dalej odpowiadające im pierwiastki równania indeksowego będą odpowiednio: α, α'; β, β'; γ, γ'. Wówczas*

$$p(t) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{t-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c}, \tag{3.9}$$

$$q(t) = \Big(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{t-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{t-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{t-c}\Big)\frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}, \tag{3.10}$$

oraz

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1. \tag{3.11}$$

Dowód. Zauważmy, że $p(t)$ musi być funkcją wymierną o biegunach jednokrotnych w punktach a, b, c i residuach w tych biegunach równych odpowiednio $1-\alpha-\alpha'$, $1-\beta-\beta'$ i $1-\gamma-\gamma'$. Zatem

$$p(t) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{t-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c} + d,$$

gdzie d jest stała. Z drugiej strony, ponieważ ∞ jest punktem nieosobliwym, to ze Stwierdzenia 3.2 funkcja $t \mapsto 2t - t^2 p(t)$ jest analityczna w nieskończoności, czyli w szczególności

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{2t - t^2 p(t)}{t^2} = d, \\ 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{2t - t^2 p(t)}{t} = 2 - 1 + \alpha + \alpha - 1 + \beta + \beta' - 1 + \gamma + \gamma' - 1 = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 1. \end{aligned}$$

Co dowodzi (3.9) i (3.11). W podobny sposób wykazujemy (3.10). □

Ćwiczenia

1. Dla danych równań sprawdź, czy punkt $t_0 = \infty$ jest punktem nieosobliwym, punktem osobliwym regularnym czy też punktem osobliwym nieregularnym
   a) $t^3(t-1)\ddot{x} + (t-1)\dot{x} + 4tx = 0$,
   b) $t^2(t^2-4)\ddot{x} + 2t^3\dot{x} + 3x = 0$,
   c) $\ddot{x} + tx = 0$.

2. Znajdź rozwiązania równań dla dużych t
   a) $t^4\ddot{x} + t(1+2t^2)\dot{x} + 5x = 0$,
   b) $2t^3\ddot{x} - t(2-5t)\dot{x} + x = 0$,
   c) $t(1-t)\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$,
   d) $t(1-t)\ddot{x} + (1-4t)\dot{x} - 2x = 0$,
   e) $t^4\ddot{x} + 2t^3\dot{x} + 4x = 0$.

3. Udowodnij, że równanie hipergeometryczne (3.3) może być zapisane w postaci

$$t\big((t\frac{d}{dt}) + a\big)\big((t\frac{d}{dt}) + b\big)x = (t\frac{d}{dt})\big((t\frac{d}{dt}) - 1 + c\big)x. \tag{3.12}$$

4. Wykaż, że funkcje zdefiniowane przez (3.7) i (3.8) są rozwiązaniami równania hipergeometrycznego (3.3).

5. Wykaż, że
   a) $(d/dt)\big({}_2F_1(a,b;c;t)\big) = (ab/c)\cdot {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;t)$,
   b) $(1+t)^n = {}_2F_1(-n,b;b;-t)$,
   c) $\operatorname{arc\,tg} t = t \cdot {}_2F_1(1,\frac{1}{2};\frac{3}{2};-t^2)$,
   d) $e^t = \lim_{a\to\infty} {}_2F_1(a,1;1;t/a)$.

4 P-równanie Riemanna i jego związek z równaniem hipergeometrycznym. Postać całkowa Barnesa

Poniższy rozdział został opracowany na podstawie książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [9], monografii E. Hille'a [3] oraz pracy B. Ziemiana [11].

4.1 P-równanie Riemanna

Zaczniemy od nazwania równania, którego istnienie zostało wykazane w Stwierdzeniu 3.5 i które ma postać

$$\begin{aligned}(4.1)\qquad \ddot{x} &+ \Big(\frac{1-\alpha-\alpha'}{t-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{t-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{t-c}\Big)\dot{x}\\ &+ \bigg(\Big(\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{t-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{t-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{t-c}\Big)\frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}\bigg)x=0\end{aligned}$$

Definicja 4.1 Równanie (4.1) o trzech osobliwościach regularnych a, b, c i o odpowiadających im pierwiastkach równania indeksowego α, α'; β, β'; γ, γ' spełniających (3.11) nazywamy *P-równaniem Riemanna.* Fakt, że x spełnia P-równanie Riemanna będziemy oznaczać poprzez

$$x=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Oczywiście równanie hipergeometryczne jest szczególnym przypadkiem P-równania Riemanna, dla którego

$$(4.2)\qquad x=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & t\\ 1-c & c-a-b & b & \end{matrix}\right\}.$$

Ale z drugiej strony zachodzi również

Stwierdzenie 4.2 *Każde P-równanie Riemanna da się sprowadzić do równania hipergeometrycznego.*

Dowód. Najpierw wykażemy, że spełniona jest następująca transformacja:

$$(4.3)\qquad \Big(\frac{t-a}{t-c}\Big)^k\Big(\frac{t-b}{t-c}\Big)^l P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma-k-l & t\\ \alpha'+k & \beta'+ll & \gamma'-k-l & \end{matrix}\right\}.$$

Zauważmy, że P-równanie Riemanna jest określone jednoznacznie przez podanie trzech osobliwości i ich wykładników. Zatem jeśli x spełnia równanie (4.1), to $x_1(t)=\big((t-a)/(t-c)\big)^k\big((t-b)/(t-c)\big)^l x(t)$ spełnia równanie P-Riemanna o tych samych osobliwościach i wykładnikach $\alpha+k$, $\alpha'+k$; $\beta+l$, $\beta'+l$; $\gamma-k-l$, $\gamma'-k-l$. Oznacza to, że zachodzi transformacja (4.3).

Podobnie wykażemy, że zachodzi transformacja

$$(4.4)\qquad P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & t_1\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

gdzie t_1, a_1, b_1, c_1 są przekształcane na t, a, b, c za pomocą tej samej homografii (tzn. $t=(At_1+B)/(Ct_1+D)$ i podobnie dla a_1, b_1 i c_1). Oznacza to, że równanie względem t_1 jest równaniem liniowym rzędu drugiego o osobliwościach w punktach otrzymanych tym samym przekształceniem homograficznym, przy wykładnikach odpowiednio α, α'; β, β'; γ, γ'. A to oznacza, że zachodzi (4.4).

Korzystając z powyższych transformacji sprowadzimy teraz P-równanie Riemanna do równania hipergeometrycznego

$$P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right\} = \Big(\frac{t-a}{t-c}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{t-b}{t-c}\Big)^{\beta} P\left\{\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & t \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{array}\right\}$$

$$= \Big(\frac{t-a}{t-c}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{t-b}{t-c}\Big)^{\beta} P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma+\alpha+\beta & t_1 \\ \alpha'-\alpha & \beta'-\beta & \gamma'+\alpha+\beta & \end{array}\right\},$$

gdzie $t_1 = \frac{(t-a)(b-c)}{(t-c)(b-a)}$. Oznacza to, porównując z (4.2), że P-równanie Riemanna może być wyrażone przez rozwiązanie równania hipergeometrycznego o elementach $a = \alpha + \beta + \gamma$, $b = \alpha + \beta + \gamma'$, $c = 1 + \alpha - \alpha'$ i t_1. □

4.2 Postać całkowa Barnesa

Lemat 4.3 (Lemat Barnesa) *Jeśli jest spełniony warunek* $\mathrm{Re}\,(-a)$, $\mathrm{Re}\,(-b) < \tilde{c} - 1 < \tilde{c} < 0$, *to funkcja*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\, ds. \tag{4.5}$$

jest rozwiązaniem równania hipergeometrycznego.

Dowód. Zapiszmy równanie hipergeometryczne w postaci

$$t(t\frac{d}{dt}+a)(t\frac{d}{dt}+b)x = (t\frac{d}{dt})(t\frac{d}{dt}-1+c)x.$$

Zauważmy, że operator $t\frac{d}{dt}$ posiada następujące własności:

$$1.\quad (t\frac{d}{dt})t^a = at^a, \qquad 2.\quad (t\frac{d}{dt})(-t)^a = a(-t)^a.$$

Niech

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)(-t)^s.$$

Aby $f(t)$ spełniało (4.2) musi zachodzić

$$\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)s(s-1+c)(-t)^s\, ds = -\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)(s+a)(s+b)(-t)^{s+1}\, ds.$$

Zauważmy, że jeśli funkcja $g(s)$ nie posiada biegunów dla $\mathrm{Re}\, s \in [\tilde{c}-1, \tilde{c}]$, to

$$\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s)s(s-1+c)(-t)^s\, ds = \int\limits_{\tilde{c}-1-i\infty}^{\tilde{c}-1+i\infty} g(s+1)(s+1)(s+c)(-t)^{s+1}\, ds = \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} g(s+1)(s+1)(s+c)(-t)^{s+1}\, ds.$$

Zatem dostajemy

$$\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \Big(g(s+1)(s+1)(s+c) + (s+a)(s+b)g(s)\Big)(-t)^{s+1}\, ds = 0.$$

Tak można zrobić o ile

$$\lim_{|\mathrm{Im}\, s|\to\infty} s^2 g(s)(-t)^s = 0. \tag{4.6}$$

Załóżmy na chwilę, że równość (4.6) jest spełniona. Wówczas dostajemy równanie różnicowe na $g(s)$ postaci

$$g(s+1) = -\frac{(s+a)(s+b)}{(s+c)(s+1)} g(s). \tag{4.7}$$

To równanie różnicowe (4.7) możemy rozwiązać w terminach funkcji gamma. Rozwiązaniem równania $u(s+1) = (s+d)u(s)$ jest $u(s) = \Gamma(s+d)$. Podobnie rozwiązaniem $u(s+1) = \frac{(s+a)(s+b)}{s+c} u(s)$ jest $u(s) = \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}$. Ponadto równanie $u(s+1) = -\frac{u(s)}{s+1}$ ma rozwiązanie postaci $u(s) = \Gamma(-s)$ (bo $\Gamma(-s) = (-s-1)\Gamma(-s-1)$). Wobec tego rozwiązaniem równania (4.7) jest funkcja

$$g(s) = \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)} \Gamma(-s).$$

Musmy teraz pokazać, że spełniony jest warunek (4.6). Po pierwsze zauważmy, że

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Gamma(s+d)}{s^d \Gamma(s)} = 1 \quad \text{o ile} \quad |\arg s| < \pi.$$

Skorzystamy również z faktu, że

$$|(-t)|^s \leqslant |t|^{\operatorname{Re} s} e^{-\theta \operatorname{Im} s}, \quad \text{gdzie} \quad \arg(-t) = \theta, \quad |\theta| < \pi$$

oraz z wynikającego z własności funkcji gamma oszacowania

$$|\Gamma(s)\Gamma(-s)| \leqslant \left|\frac{-\pi}{s \sin \pi s}\right| \leqslant \left|\frac{2\pi}{s}\right| e^{-\pi |\operatorname{Im} s|}.$$

Ostatecznie dostajemy oszacowanie

$$|s^2 g(s)(-t)^s| \quad \leqslant \quad M |s^{2+a+b-c} \Gamma(s)\Gamma(-s)| \cdot |(-t)^s| \leqslant \tilde{M} |t|^{\operatorname{Re} s} |s|^{1+a+b-c} e^{(|\theta|-\pi)|\operatorname{Im} s|}, \tag{4.8}$$

z którego wynika, że

$$|s^2 g(s)(-t)^s| \to 0 \qquad \text{dla} \qquad |\operatorname{Im} s| \to \infty,$$

co oznacza, że warunek (4.6) jest spełniony.

Zatem możemy zapisać, że

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)} \Gamma(-s)(-t)^s \, ds.$$

Zauważmy, że funkcja podcałkowa ma bieguny jednokrotne dla s równych $-a$, $-a-1$, ..., $-b$, $-b-1$, ..., 0, 1, ... Załóżmy, że $\operatorname{Re}(-a)$, $\operatorname{Re}(-b) < \tilde{c} - 1 < \tilde{c} < 0$ (jeśli tak się nie da zrobić, to można lokalnie zdeformować kontur całkowania — tak, aby $-a+1$ i $-b+1$ znajdowały się na lewo od niego, zaś 0 na prawo). □

Stwierdzenie 4.4 *Przy powyższych założeniach na $\tilde{c}$ (lub ogólniej na kontur całkowania) zachodzi wzór*

$${}_2F_1(a,b;c,t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty} \frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)} \Gamma(-s)(-t)^s \, ds \quad \textit{dla} \quad |t| < 1, \tag{4.9}$$

dzięki któremu dostajemy przedłużenie analityczne funkcji hipergeometrycznej ${}_2F_1$ na zbiór $\overline{\mathbb{C}} \setminus [1, \infty]$.

Dowód. Niech $\gamma_{T,N}$ oznacza skierowany zgodnie z ruchem zegara kontur będący brzegiem prostokąta o wierzchołkach w punktach $-\tilde{c} \pm Ti$ oraz $N + \frac{1}{2} \pm Ti$. Zauważmy, że dla $|t| < 1$ na mocy oszacowania (4.8) dostajemy, że

$$|s^2 g(s)(-t)^s| \to 0 \qquad \text{dla} \qquad \operatorname{Re} s \to \infty.$$

Korzystając z tego faktu i z (4.6) dostajemy, że

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{T,N}}\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty}\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\,ds. \tag{4.10}$$

Z drugiej strony, z twierdzenia o residuach dostajemy, że

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{T,N}}\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\,ds=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{Res}_{s=n}\Big(\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\Big)=$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)}(-t)^n\mathrm{Res}_{s=n}\Gamma(-s)=\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)}(-t)^n\cdot\frac{(-1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)n!}t^n.$$

Zatem z (4.10)

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int\limits_{\tilde{c}-i\infty}^{\tilde{c}+i\infty}\frac{\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)}{\Gamma(s+c)}\Gamma(-s)(-t)^s\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+c)n!}t^n={}_2F_1(a,b;c;t),$$

co kończy dowód. □

Podobnie, całkując w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wzdłuż brzegu prostokąta o wierzchołkach w punktach $-\tilde{c}\pm Ti$ oraz $-N-\frac{1}{2}\pm Ti$ dostajemy

Stwierdzenie 4.5 *Dla $|t|>1$ zachodzi wzór*

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c,t)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c)}(-t)^{-a}{}_2F_1(a,a-c+1;a-b+1,t^{-1})+\frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c)}(-t)^{-b}{}_2F_1(b,b-c+1;b-a+1,t^{-1}).$$

Zauważmy, że Stwierdzenie 4.5 pokazuje nam jaki jest związek pomiędzy rozwiązaniami równania hipegeometrycznego wokół zera $x_1(t)$ i wokół nieskończoności: $z_1(t)$ i $z_2(t)$.

5 Równanie Legendre'a

Poniższy rozdział został opracowany na podstawie książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [10] oraz monografii E. Hille'a [3].

Definicja 5.1 *Równaniem Legendre'a* (inaczej: *równaniem kulistym*, *równaniem sferycznym*) nazywamy równanie

$$(1-t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + a(a+1)x = 0, \tag{5.1}$$

gdzie $a \in \mathbb{C}$.

Zauważmy, że równanie (5.1) można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt}\Big((1-t^2)\dot{x}\Big) + a(a+1)x = 0. \tag{5.2}$$

Nazwa pochodzi od francuskiego matematyka Adrien-Marie Legendre'a, który w 1785 roku rozważał równanie (5.1) w przypadku $a = n$. Równanie to pojawia się w w wielu zagadnieniach fizyki, przede wszystkim w opisie pól w układzie sferycznym (np. w kwantowym opisie atomów czy rozkładzie multipolowym pola elektromagnetycznego).

Punkty osobliwe regularne tego równania to: -1, 1 i ∞. Zaś pierwiastki równania indeksowego, to:
dla -1: 0, 0;
dla 1: 0, 0;
dla ∞: $a+1$, $-a$.

Z ogólnej teorii (Twierdzenie 2.1) wynika zatem, że w otoczeniu $t=-1$ i w otoczeniu $t=1$ jedno z rozwiązań jest logarytmiczne.

Zauważmy jeszcze, że równanie Legendre'a jest szczególnym przypadkiem równania P-Riemanna, czyli spełnia równanie

$$x = P\left\{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a+1 & t \\ 0 & 0 & -a & \end{array}\right\}.$$

Podstawiając $s = \frac{1}{2}(1-t)$ do równania (5.1) dostajemy

$$s(1-s)\ddot{x} + (1-2s)\dot{x} + a(a+1)x = 0.$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy równanie hipergeometryczne z parametrami: $a+1$, $-a$, 1. Zatem pierwsze rozwiązanie wokół $t=1$ ma postać

$$P_a(t) = {}_2F_1(a+1, -a; 1; \frac{1}{2}(1-t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a+1)_i(-a)_i}{i!i!}\Big(\frac{1}{2}(1-t)\Big)^i. \tag{5.3}$$

W szczególności dla $a = n$ dostajemy *wielomiany Legendre'a*

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(n+1)_i(-n)_i}{2^i i!i!}(1-t)^i, \tag{5.4}$$

gdyż $(-n)_i = 0$ dla $i > n$. Kilka pierwszych wielomianów Legendre'a to:

$$P_0(t) = 1, \qquad P_1(t) = t, \qquad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1)$$
$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t), \quad P_4(t) = \tfrac{1}{8}(35t^4-30t^2+3), \quad P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5-70t^3+15t).$$

Zachodzi

Stwierdzenie 5.2 (Wzór Rodriguesa)

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n. \tag{5.5}$$

Dowód. Oznaczmy prawą stronę (5.5) przez $f_n(t)$. Zauważmy, że $f_n(1) = 1$ oraz $f_n(t)$ jest wielomianem. Zatem aby udowodnić równość (5.5) wystarczy pokazać, że $f_n(t)$ jest rozwiązaniem równania Legendre'a (5.1). W tym celu zauważmy, że

$$f_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\Big(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}t^{2n-2i}\Big) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(-1)^i(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(n-2i)!}t^{n-2i}.$$

Aby zakończyć dowód wystarczy wstawić $f_n(t)$ w postaci szeregu do równania Legendre'a (5.1) i wyliczyć, że jest to równanie spełnione wówczas tożsamościowo. □

Ze Stwierdzenia 5.2 w szczególności dostajemy, że $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$. Korzystając również ze Stwierdzenia 5.2 i ze wzoru całkowego Cauchy'ego dostajemy

Stwierdzenie 5.3 (Całka Schläfliego)

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - t| = \varepsilon}\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta - t)^{n+1}}\,d\zeta$$

Jedna z najważniejszych własności $P_n(t)$ mówi, że

Stwierdzenie 5.4 *Wielomiany Legendre'a tworzą układ ortogonalny w przestrzeni $L^2[-1,1]$. W szczególności zachodzi*

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{dla} \quad m = n \end{cases}.$$

Dowód. Załóżmy, że $m > n$. Całkując n-krotnie przez części dostajemy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\Big((t^2-1)^m\Big)^{(m)}\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n)}dt &= \Big((t^2-1)^m\Big)^{(m-1)}\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n)}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\Big((t^2-1)^m\Big)^{(m-1)}\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n+1)}dt \\ &= ... = (-1)^m\int_{-1}^{1}(t^2-1)^m\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n+m)}dt = 0,\end{aligned}$$

bo $\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n+m)} = 0$. Podobnie dostajemy dla $m < n$. Zaś dla $n = m$ mamy

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n)}\Big((t^2-1)^n\Big)^{(n)}dt &= (-1)^n\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\Big((t^2-1)^n\Big)^{(2n)}dt = 2(2n)!\int_{0}^{1}(1-t^2)^n\,dt \\ &= 2(2n)!\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\alpha\,d\alpha = 2(2n)!\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_n(t)\,dt = \frac{2(2n)!}{2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

□

Korzystając z wymienionych uprzednio przedstawień wielomianów Legendre'a dostajemy następujące formuły rekurencyjne:

$$\begin{array}{ll}\text{I.} & P'_{n+1}(t) - tP'_n(t) = (n+1)P_n(t) \\ \text{II.} & (n+1)P_n(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0.\end{array}$$

Korzystając ze wzorów na rozwiązania równania hipergeometrycznego wokół nieskończoności można podać rozwiązanie równania (5.1) w otoczeniu ∞. Dostajemy wówczas *funkcje Legendre'a drugiego rodzaju*:

$$Q_a(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{3}{2})}(2t)^{-1-a}{}_2F_1(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a+1; a+\frac{3}{2}; \frac{1}{t^2}).$$

Dla $a = n$ mają one przedstawienia całkowe postaci

$$Q_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n (t-x)^{-n-1}\, dx.$$

Ponadto zachodzi związek pomiędzy wielomianami Legendre'a pierwszego i drugiego rodzaju

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{t-x}\, dx.$$

Ćwiczenia

1. Uzupełnij dowód wzoru Rodriguesa.
2. Wykaż wzór na całkę Schläfliego.
3. Wykaż wzory rekurencyjne I–II na wielomiany Legendre'a.
4. Przedstawić wielomian $W(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5$ w postaci sumy wielomianów Legendre'a.

6 Konfluentne równanie hipergeometryczne

Poniższy rozdział został opracowany na podstawie monografii E. Hille'a [3] i preprintu B. Ziemiana [11]. Nieco inaczej zdefiniowane konfluentne równanie hipergeometryczne można znaleźć w książce E.T. Whittakera i G.N. Watsona [10].

Na początek wróćmy do równania hipergeometrycznego

$$t(1-t)\ddot{x} + \Big(c - (a+b+1)t\Big)\dot{x} - abx = 0.$$

Podstawmy $t = s/b$. Wówczas

$$\frac{dx}{ds} = \dot{x}\frac{1}{b}, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \ddot{x}\frac{1}{b^2}$$

i równanie przyjmie postać

$$\frac{s}{b}(1-\frac{s}{b})b^2\frac{d^2x}{ds^2} + \Big(c - (a+b+1)\frac{s}{b}\Big)b\frac{dx}{ds} - abx = 0.$$

Wstawiając t zamiast s i dzieląc obie strony przez b dostajemy

(6.1) $$t(1-\frac{t}{b})\ddot{x} + (c - \frac{a+b+1}{b}t)\dot{x} - ax = 0.$$

Ostatecznie, przechodząc z $|b|$ do nieskończoności otrzymujemy

(6.2) $$t\ddot{x} + (c-t)\dot{x} - ax = 0.$$

Definicja 6.1 Równanie (6.2) nazywamy *konfluentnym równaniem hipergeometrycznym* lub inaczej *równaniem Kummera.*

Zajmiemy się teraz badaniem punktów osobliwych tego równania. Przypomnijmy, że równanie hipergeometryczne ma dokładnie trzy punkty osobliwe i wszystkie regularne (dla $t = 0, 1, \infty$). Natomiast równanie (6.1) ma punkty regularne osobliwe (dla $s = tb = 0, b, \infty$). Biorąc $|b| \to \infty$ dostajemy, że dwie regularne osobliwości — w b i ∞ — przechodzą do wspólnej granicy („zlewają sie") równej ∞. Proces przejście do wspólnej granicy nazywamy *metodą konfluencji*, a otrzymane po przejścu granicznyn równanie nazywamy *formą konfluentna* równanie wyjściowego (stąd nazwa konfluentne równanie hipergeometryczne).

Równanie (6.2) ma zatem osobliwości w punktach $t = 0$ i $t = \infty$. Dla $t = 0$ mamy punkt osobliwy regularny, a co dla $t = \infty$? Zauważmy, że w nieskończoności nie jest analityczna funkcja $t \mapsto tp(t) = c - t$ (bo nie jest ograniczona w nieskończoności). Zatem na podstawie Stwierdzenia 3.2 punkt $t = \infty$ jest punktem osobliwym nieregularnym. Oznacza to, że w wyniku przejścia granicznego ($|b| \to \infty$) dwie osobliwości regularne w b i ∞ „zlały się" w jedną osobliwość nieregularną w ∞.

Postaramy się teraz znaleźć rozwiązanie równania (6.2). W tym celu zauważmy, że rozwiązanie (6.1) ma postać

$${}_2F_1(a,b;c;\frac{t}{b}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\Big(\frac{t}{b}\Big)^n \quad \text{dla} \quad |t| < |b|, \quad c \neq 0, -1, -2, -3, \dots.$$

Przechodząc z $|b|$ do nieskończoności dostajemy dla $|t| < |b|$

$$\lim_{|b|\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;\frac{t}{b}) = \lim_{|b|\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\Big(\frac{t}{b}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}t^n \lim_{|b|\to\infty}\frac{(b)_n}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}t^n = {}_1F_1(a;c;t).$$

Zatem jednym z rozwiązań konfluentnego równania hipergeometrycznego jest funkcja hipergeometryczna typu $(1,1)$, zwana *konfluentną funkcją hipergeometryczną*, która jest postaci

(6.3) $$x_1(t) = {}_1F_1(a;c;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}t^n.$$

Zauważmy, że promień zbieżności szeregu ${}_1F_1$ wynosi nieskończoność (to wynika zarówno z postaci tego szeregu jak i z faktu, że nie ma innych osobliwości poza 0 i ∞). Zatem rozwiązanie $x_1(t)$ jest funkcją całkowitą na $\mathbb{C}$.

Przypatrzmy się jeszcze bliżej rozwiązaniom dla $a = -n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $x_1(t) = {}_1F_1(-n; c; t)$ jest wielomianem stopnia n. Przyjmując $c = 1 + \alpha$ możemy zapisać

$$ {}_1F_1(-n; 1+\alpha; t) = \binom{n+\alpha}{n} L_n^{(\alpha)}(t), $$

gdzie $L_n^{(\alpha)}(t)$ będziemy nazywać *n-tym wielomianem Laguerre'a rzędu α.*

W szczególności dla $\alpha = 0$ dostajemy *n-ty wielomian Laguerre'a*

$$ L_n(t) = {}_1F_1(-n; 1; t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{(i!)^2} t^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-t)^i}{i!}. $$

Oczywiście spełnia on równanie

$$ t\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + nx = 0. $$

Wielomiany Laguerre'a można wyrazić również za pomocą wzoru

$$ n! L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}). \tag{6.4} $$

Wielomiany te są ortogonalne

$$ \int_0^{\infty} e^{-t} L_m(t) L_n(t)\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}. $$

Wróćmy teraz do ogólnej postaci konfluentnego równania hipergeometrycznego (6.2). Zauważmy, że dla $t = 0$ równanie indeksowe ma pierwiastki w 0 i $1 - c$. Również drugie rozwiązanie bazowe w otoczeniu zera możemy znaleźć korzystając z rozwiązania równania hipergeometrycznego. Załóżmy zatem, że $c \notin \mathbb{Z}$. Wówczas drugie rozwiązanie ma postać

$$ x_2(t) = t^{1-c} {}_1F_1(a+1-c; 2-c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n}{n!(2-c)_n} t^{n+1-c}. \tag{6.5} $$

W przypadku $c \in \mathbb{Z}$ drugie rozwiązanie może być postaci (6.5) lub też postaci logarytmicznej.

Zauważmy, że $x_1(t)$ jest jedynym rozwiązaniem (z dokładnością do mnożenia przez stałą), które jest funkcją całkowitą ($x_2(t)$ nie jest analityczne w zerze).

Stwierdzenie 6.2 (Transformacja Kummera) *Dla $t \in \mathbb{C}$ i $c \neq 0, -1, -2, ...$ zachodzi wzór*

$$ {}_1F_1(a; c; t) = e^t {}_1F_1(c-a; c; -t). \tag{6.6} $$

Dowód. Niech $x(t) = {}_1F_1(a; c; t)$ będzie rozwiązaniem konfluentnego równania hipergeometrycznego (6.2). Podstawmy $x(t) = e^t y(-t)$ i sprawdźmy jakie równanie musi spełniać $y(t)$. Mamy

$$ \dot{x} = e^t y(-t) - e^t \dot{y}(-t), \qquad \ddot{x}(t) = e^t y(-t) - -e^t \dot{y}(-t) + e^t \ddot{y}(-t). $$

Czyli $y(t)$ spełnia następujące równanie

$$ t\ddot{y}(-t) + (-c-t)\dot{y}(-t) + (c-a)y(-t) = 0, \quad \text{a po zamianie } -t \text{ na } t\text{:} \quad t\ddot{y}(t) + (c-t)\dot{y}(t) - (c-a)y(t) = 0. $$

Zatem $y(t)$ spełnia konfluentne równanie hipergeometryczne jeśli zamiast a weźmiemy $c - a$. Co więcej, ponieważ $y(t) = e^t x(-t)$, to $y(t)$ musi być funkcją całkowitą na $\mathbb{C}$ (bo $x(t)$ jest całkowite) oraz $y(0) = x(0) = 1$. Oznacza to, że $y(t) = {}_1F_1(c-a; c; -t)$, a stąd dostajemy (6.6). □

Stwierdzenie 6.3 *Dla* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ *zachodzi*

$$
{}_1F_1(a;c;t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{ts} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\, ds. \tag{6.7}
$$

Dowód. W dowodzie wykorzystamy funkcję beta Eulera, zdefiniowaną jako

$$
B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}\, dt \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,\ \operatorname{Re}\beta > 0
$$

i jej związek z funkcją gamma Eulera:

$$
B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
$$

Mamy:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 e^{ts} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\, ds &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ts)^n}{n!} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^1 s^{a+n-1}(1-s)^{c-a-1}\, ds \Big) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(a+n, c-a)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)n!} t^n.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że ponieważ $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, to całka po lewej stronie jest skończona, możemy dokonać zamiany kolejności całkowania i brania sumy szeregu oraz funkcja $B(a+n, c-a)$ jest dobrze określona dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Aby zakończyć dowód zauważmy, że

$$
\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} t^n = {}_1F_1(a;c;t).
$$

□

Wiele funkcji specjalnych można wyrazić za pomocą rozwiązań konfluentnego równania hipergeometrycznego. Jako przykład weźmy funkcję błędu zdefiniowaną jako

$$
\operatorname{Erf}(y) = \int_0^y e^{-t^2}\, dt.
$$

Po zamianie zmienny $t = y\sqrt{\alpha}$ i wykorzystaniu wzoru (6.7) dostajemy

$$
\operatorname{Erf}(y) = \frac{y}{2} \int_0^1 \frac{e^{-y^2\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\, d\alpha = \frac{y}{2} \int_0^1 e^{(-y^2)\alpha} \alpha^{\frac{1}{2}-1} (1-\alpha)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1}\, d\alpha = \frac{y}{2} \cdot {}_1F_1(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-y^2) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = y \cdot {}_1F_1(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-y^2).
$$

Ćwiczenia

1. Wyprowadź wzory (6.3) i (6.5) na rozwiązania $x_1(t)$ i $x_2(t)$ równania (6.2) stosując metodę szeregów Frobeniusa.
2. Wykaż wzór (6.4) na wielomiany Laguerre'a.
3. Udowodnij, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = (1-t)^{-1}\exp\Big(-\frac{xt}{1-t}\Big)$.
4. Korzystając z (6.4) wykaż własność ortogonalności dla wielomianów Laguerre'a.
5. Wyraź za pomocą rozwiązań konfluentnego równania hipergeometrycznego następujące funkcje:
   a) e^t, $\sin t$, $\cos t$, $\sinh t$, $\cosh t$;
   b) niekompletną funkcję gamma $\gamma(a,y) = \int_0^y e^{-t} t^{a-1}\, dt$;
   c) całki Fresnela $S(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$ i $C(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$.

7 Równanie Bessela

Rozdział ten został opracowany na podstawie monografii E. Hille'a [3] i książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [10].

Definicja 7.1 *Równaniem różniczkowym Bessela* nazywamy równanie

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - p^2)x = 0, \quad \text{gdzie} \quad p \geqslant 0. \tag{7.1}$$

Nazwa pochodzi od Friedricha Wilhelma Bessela (1784–1848), który zajmował się tym równaniem podczas badania zaburzeń ruchu planet po orbitach.

Równanie Bessela jest jednym z najsłynniejszych równań różniczkowych zwyczajnych. Pojawia się ono w wielu zagadnieniach fizyki matematycznej, astronomii i techniki (np. przy opisie amplitudy drgań kulistej membrany, czy temperatury wewnątrz jednorodnej, stygnącej kuli).

Punktami osobliwymi są 0 i ∞. Punkt $t = 0$ jest punktem osobliwym regularnym. Aby sprawdzić charakter punktu osobliwego dla $t = \infty$, zbadajmy analityczność w nieskończoności funkcji:
$t \mapsto tp(t) = 1$ — funkcja analityczna w nieskończoności;
$t \mapsto t^2q(t) = t^2 - p^2 \to \infty$ jeśli $t \to \infty$ — funkcja nie jest ograniczona w nieskończoności, więc nie jest też tam analityczna.

Zatem $t = \infty$ jest punktem osobliwym nieregularnym.

Znajdziemy rozwiązania wokół zera metodą szeregów Frobeniusa. Będziemy szukać rozwiązań postaci $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+l}$. Wstawiając do (7.1) dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+l)(n+l-1)a_n t^{n+l} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+l)a_n t^{n+l} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}t^{n+l} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n t^{n+l}.$$

Stąd dostajemy równanie indeksowe

$$(n=0) \qquad l(l-1) + l - p^2 = 0 \quad \text{o pierwiastkach} \quad l_1 = p,\ l_2 = -p$$

oraz zależność rekurencyjną

$$(n>1) \qquad \Big((n+l)^2 - p^2\Big)a_n = -a_{n-2} \quad \text{czyli} \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+l-p)(n+l+p)}.$$

Wobec tego dla $l = p$ dostajemy

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2n\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot(2n+2p)\cdots(2+2p)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(1+p)_n} \quad \text{oraz} \quad x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(1+p)_n}t^{2n}.$$

Podobnie dla $l = -p$ dostajemy

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(1-p)_n} \quad \text{oraz} \quad x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(1-p)_n}t^{2n}.$$

Przyjmując za a_0 odpowiednio $\frac{1}{2^p\Gamma(1+p)}$ i $\frac{1}{2^{-p}\Gamma(1-p)}$ dostajemy rozwiązania równania (7.1)

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+p+n)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+p} \quad \text{i} \quad J_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-p+n)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n-p}, \tag{7.2}$$

które będziemy nazywać *funkcjami Bessela* (lub inaczej: *funkcjami walcowymi*) *pierwszego rodzaju rzędu* p i $-p$.

Jeżeli $2p \notin \mathbb{Z}$ to rozwiązania $J_p(t)$ i $J_{-p}(t)$ są liniowo niezależne. Wobec tego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = AJ_p(t) + BJ_{-p}(t), \quad \text{gdzie} \quad A,\ B \ \text{— stałe}. \tag{7.3}$$

Załóżmy teraz, że $2p \in \mathbb{Z}$ ale $p \notin \mathbb{Z}$. Wówczas $J_{-p}(t)$ jest nieograniczony w otoczeniu zera, zaś $J_p(t)$ jest ograniczone. Oznacza to, że obydwa rozwiązania są liniowo niezależne i wobec tego również zachodzi (7.3).

Przypadek $p \in \mathbb{N}_0$ jest trudniejszy. Jeśli $p = m$, to

$$J_{-m}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(t/2)^{2n-m}}{n!(n-m)!} = \sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n \frac{(t/2)^{2n-m}}{n!(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+m} \frac{(t/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!} = (-1)^m J_m(t),$$

a zatem funkcje $J_m(t)$ i $J_{-m}(t)$ są liniowo zależne. Oznacza to, że dla $p \in \mathbb{N}_0$ drugie liniowo niezależne rozwiązanie (oprócz $J_p(t)$) musi w swoim rozwinięciu zawierać logarytmy. Takie rozwiązania będziemy nazywać *funkcjami Bessela drugiego rodzaju.* Najczęściej spotyka się następujące takie funkcje (różnią się one pomiędzy sobą o stałą):

1) Funkcja wprowadzona przez Hankela

$$\widetilde{Y}_p(t) = \pi e^{\pi i} \frac{J_p(t)\cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin 2p\pi} \quad \text{dla} \quad p \notin \mathbb{Z}.$$

Natomiast dla $p = m \in \mathbb{Z}$ funkcję tę definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_m(t) &= \lim_{p\to m} \widetilde{Y}_p(t) = \lim_{\epsilon\to 0} 2\pi e^{(m+\epsilon)\pi i} \frac{J_{m+\epsilon}(t)\cos(m+\epsilon)\pi - J_{-m-\epsilon}(t)}{\sin 2(m+\epsilon)\pi} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2\pi e^{m\pi i}}{\sin 2\epsilon\pi}\Big(J_{m+\epsilon}(t)(-1)^m - J_{-m-\epsilon}(t)\Big) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-1}\Big(J_{m+\epsilon}(t) - (-1)^m J_{-m-\epsilon}(t)\Big). \end{aligned}$$

2) Funkcja Webera

$$Y_p(t) = \frac{J_p(t)\cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin p\pi} \quad \text{dla} \quad p \neq \mathbb{Z}$$

$$Y_m(t) = \lim_{p\to m} \frac{J_p(t)\cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin p\pi} \quad \text{dla} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Zachodzi związek

$$Y_p(t) = \frac{\widetilde{Y}_p(t)\cos p\pi}{\pi e^{p\pi i}}.$$

Można wykazać, że

(7.4) $$Y_m(t) = -\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{k!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-m+2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{m+2n}\Big(2\ln(t/2) + 2\gamma - H_{m+n} - H_n\Big),$$

gdzie γ — stała Eulera.

Zachodzą następujące wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela:

(7.5) I. $tJ_{p+1}(t) - 2pJ_p(t) + tJ_{p-1}(t) = 0$, II. $J'_p(t) = -\frac{p}{t}J_p(t) + J_{p-1}(t)$, III. $J'_p(t) = \frac{1}{2}\Big(J_{p-1}(t) - J_{p+1}(t)\Big)$.

Takie same tożsamości są spełnione przez funkcje Bessela drugiego rodzaju $Y(t)$ i $\widetilde{Y}(t)$.

Zajmiemy się teraz funkcjami Bessela dla argumentu urojonego. Przypuśćmy więc, że t występujące w równaniu Bessela (7.1) jest czysto urojone, tzn. $t = is$, $s \in \mathbb{R}$. Po tej zamianie zmiennych dostaniemy równanie

(7.6) $$s^2\ddot{x} + s\dot{x} - (s^2 + p^2)x = 0, \quad \text{gdzie} \quad p \geqslant 0.$$

Definicja 7.2 Równanie (7.6) nazywamy *zmodyfikowanym równaniem Bessela.*

Podobnie jak w przypadku zwykłego równania Bessela znajdziemy rozwiązanie metodą szeregów Frobeniusa. Równanie indeksowe ma postać $l(l-1) + l - p^2 = 0$ i rozwiązaniami są $l_1 = p$, $l_2 = -p$. Natomiast zależność rekurencyjna ma postać $((n+l)^2 - p^2)a_n = a_{n-2}$. Rozwiązaniami są funkcje

(7.7) $$I_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1+p+n)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+p} \quad \text{i} \quad I_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1-p+n)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n-p},$$

które będziemy nazywać *zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rodzaju rzędu* p *i* $-p$.

Zachodzi zależność
$$I_p(t) = i^{-p} J_p(it).$$
Dlatego też I_p spełnia te same wzory rekurencyjne co $J_p(t)$. Mamy również dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$
$$I_{-m}(y) = J_{-m}(iy) i^m = (-1)^m J_m(iy) i^m = J_m(iy)(i)^{-m} = I_m(y).$$
Zatem jeśli $p \in \mathbb{Z}$, to musimy więc wziąć *zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju* zdefiniowaną jako

$$K_p(t) = \frac{1}{2}\pi\Big(I_{-p}(t) - I_p(t)\Big)\operatorname{ctg} p\pi \quad \text{dla } p \notin \mathbb{Z}; \qquad K_m(t) = \lim_{p\to m} K_p(t) \quad \text{dla } m \in \mathbb{Z}. \tag{7.8}$$

Stwierdzenie 7.3 (Schlömilch) *Zachodzi wzór*

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n. \tag{7.9}$$

Dowód. Przedstawiając lewą stronę (7.9) jako iloczyn szeregów potęgowych dostajemy
$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{-m}}{m!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^m\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z) t^n,$$
gdzie
$$a_n(z) = \sum_{k,m\geqslant 0,\ k-m=n} \frac{(-1)^m}{k!m!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{k+m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!m!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2m+n} = J_n(z).$$
□

Korzystając ze Stwierdzenia 7.3 wykażemy

Stwierdzenie 7.4 *Zachodzą następujące wzory i relacje*

$$e^y = I_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(y) \quad \textit{dla każdego} \quad y \in \mathbb{R}; \tag{7.10}$$

$$|I_0(y)| < e^{|y|}, \quad |I_n(y)| < \frac{1}{2}e^{|y|} \quad \textit{dla każdego} \quad y \in \mathbb{R}; \tag{7.11}$$

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{in\theta} \quad \textit{dla każdego} \quad z \in \mathbb{C},\ \theta \in \mathbb{R}; \tag{7.12}$$

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\, d\theta \quad \textit{dla każdego} \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}; \tag{7.13}$$

$$|J_n(x)| < 1 \quad \textit{dla każdego} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}; \tag{7.14}$$

$$I_0(2y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(x+iy)|^2 \quad \textit{dla każdego} \quad x, y \in \mathbb{R}\ n \in \mathbb{Z}; \tag{7.15}$$

$$|J_0(x+iy)| < e^{|y|}, \quad |J_n(x+iy)| < \frac{1}{\sqrt{2}}e^{|y|} \quad \textit{dla każdego} \quad x, y \in \mathbb{R}; \tag{7.16}$$

$$J_0(z)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)^2 = 1 \quad \textit{dla każdego} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7.17}$$

Dowód. Wstawiając do równania (7.9) $z = iy$ i $t = -i$ mamy
$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{1}{2}iy(-2i)} = e^y \quad \text{i} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(iy)(-i)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(y) = I_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(y),$$

a stąd dostajemy (7.10). Bezpośrednio z (7.10) wynika (7.11). Wstawiając teraz do równania (7.9) $t = e^{i\theta}$ mamy

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{1}{2}z(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = e^{iz\sin\theta} \quad \text{i} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)e^{in\theta},$$

a stąd dostajemy (7.12). Zauważmy, że wzór (7.12) przedstawia rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $z \mapsto e^{iz\sin\theta}$ o współczynnikach $J_n(z)$. Oznacza to, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ i $z \in \mathbb{C}$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta,$$

a zatem zachodzi (7.13). Jeśli skorzystamy ze wzoru (7.13) biorąc $z = x \in \mathbb{R}$, to dostaniemy oszacowanie (7.14). Zauważmy dalej, że funkcja $\theta \mapsto e^{iz\sin\theta} \in L^2(-\pi,\pi)$, więc dzięki (7.13) dla $z = x + iy$ zachodzi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{iz\sin\theta}|^2\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2y\sin\theta}\,d\theta = 2\pi J_0(2iy) = 2\pi I_0(2y).$$

Z drugiej strony, korzystając z (7.12) i z własności szeregów Fouriera

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{iz\sin\theta}|^2\,d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)e^{in\theta}\Big)\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{J_n(z)}e^{-in\theta}\Big)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(z)|^2\,d\theta = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(z)|^2\\ &= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(x+iy)|^2,\end{aligned}$$

a stąd dostajemy (7.15). Korzystając z (7.15) i z (7.11) mamy oszacowanie

$$|J_0(x+iy)|^2 \leqslant |I_0(2y)| \leqslant e^{|2y|} \quad \text{oraz} \quad 2|J_n(x+iy)|^2 \leqslant |I_0(2y)| \leqslant e^{|2y|},$$

z którego wynika (7.16). Wstawiając $y = 0$ do (7.15) dostajemy, że

$$J_0(x)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)^2 = I_0(0) = 1. \tag{7.18}$$

Zauważmy, że lewa strona (7.18) jest analityczna dla $x \in \mathbb{R}$ i przedłuża się do funkcji analitycznej dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$. Z jednoznaczności funkcji analitycznej, funkcja po przedłużeniu musi nadal być stale równa jeden. A to dowodzi (7.17).

□

Ćwiczenia

1. Wykaż, że prawa strona (7.4) jest rozwiązaniem równania Bessela.
2. Wyprowadź wzory rekurencyjne (7.5).
3. Znaleźć rozwiązania ogólne równania (tzn. wyrazić je za pomocą funkcji Bessela):
   a) $\ddot{x} + \frac{3}{t}\dot{x} + (k^2 + \frac{1}{t^2})x = 0$ (wskazówka: podstawić $x(t) = t^{-1}y(t)$),
   b) $t\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{4}x = 0$ (wskazówka: podstawić $t = s^2$),
   c) $\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + 16t^6x = 0$ (wskazówka: podstawić $s = t^4$),
   d) $t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} + (9t^2 + \frac{1}{4})x = 0$ (wskazówka: podstawić $x(t) = t^{-\frac{1}{2}}y(t)$),
   e) $\ddot{x} - tx = 0$ (wskazówka: podstawić $x(s) = s^{\frac{1}{3}}y(s)$ oraz $s = t^{\frac{3}{2}}$),
   f) $\ddot{x} + \frac{4}{t}\dot{x} - (4k^2 + \frac{27}{4t^2})x = 0$ (wskazówka: podstawić $x(t) = t^{-\frac{3}{2}}y(t)$).
4. Znaleźć rozwiązanie równania (tzn. wyrazić je za pomocą funkcji Bessela) spełniające dane warunki brzegowe:
   a) $t^2\ddot{x} + t\dot{x} - (9t^2 + 1)x = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 5$.

8 Problem Riemanna–Hilberta

Prezentowany materiał pochodzi głównie z pracy B. Ziemiana [11] i książki E. Hille'a [3]. Więcej o problemie Riemanna-Hilberta można dowiedzieć się z poświęconej temu zagadnieniu pracy D. Anosova i A. Bolibrucha [1]. W szczególności tam też można znaleźć konstrukcję kontrprzykładu Bolibrucha będącego negatywną odpowiedzią na problem postawiony przez Hilberta.

8.1 Przedłużenie analityczne

Definicja 8.1 Niech na obszarach $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ będą zadane funkcje holomorficzne $f_1(z) \in \mathcal{O}(D_1)$ i $f_2(z) \in \mathcal{O}(D_2)$ równe na części wspólnej $f_1(z) = f_2(z)$ dla $z \in D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Mówimy wówczas, że każda z funkcji jest *bezpośrednim przedłużeniem analitycznym* drugiej.

Pojęcie przedłużenia analitycznego daje się w naturalny sposób uogólnić:

Definicja 8.2 Niech będzie dany skończony ciąg funkcji $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ analitycznych odpowiednio na obszarach $D_1, D_2, \ldots, D_n$ i niech każda następna funkcja będzie bezpośrednim przedłużeniem analitycznym poprzedniej. Mówimy wówczas, że funkcja $f_n(z)$ jest *pośrednim przedłużeniem analitycznym* funkcji $f_1(z)$.

Dla pośredniego przedłużenia analitycznego możliwe są dwa przypadki:

1) W części wspólnej każdego z dwóch obszarów D_i i D_k funkcje $f_i(z)$ i $f_k(z)$ są identyczne. Wówczas na $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ mamy określoną jedną funkcję analityczną $f(z)$, taką że $f_i(z) = f(z)$ dla $z \in D_i$.

2) W części wspólnej dwóch obszarów, np. D_1 i D_n mamy $f_1(z) \neq f_n(z)$. Wtedy na obszarze $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ nie jest określona jedna funkcja, a mówimy, że $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ są *gałęziami jednej funkcji wieloznacznej.*

Zamiast o funkcji wieloznacznej możemy mówić o funkcji jednoznacznej na *powierzchni Riemanna* danej funkcji. Na przykład dla $f(z) = \sqrt{z}$ powierzchnia Riemanna jest dwulistna, a dla $f(z) = \ln z$ powierzchnia Riemanna ma nieskończenie wiele liści.

Wprowadźmy jeszcze pojęcie przedłużenia analitycznego wzdłuż drogi.

Definicja 8.3 Niech $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ będzie drogą w $\mathbb{C}$ i niech będzie dany skończony ciąg funkcji $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ analitycznych odpowiednio na obszarach $D_1, D_2, \ldots, D_n$ i niech każda następna funkcja będzie bezpośrednim przedłużeniem analitycznym poprzedniej. Jeśli dodatkowo założymy, że dla pewnych liczb $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 1$ zachodzi $\gamma(a_i) \in D_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ oraz $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \cup D_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ to mówimy, że funkcja $f_1(z) \in \mathcal{O}(D_1)$ *przedłuża się analitycznie wzdłuż drogi* γ do funkcji $f_n(z) \in \mathcal{O}(D_n)$.

Zauważmy, że jeśli funkcja f_1 przedłuża się analitycznie wzdłuż drogi γ do funkcji f_n to wówczas f_n jest pośrednim przedłużeniem analitycznym funkcji f_1.

Ponadto, jeśli mamy dwie drogi γ_1 i γ_2 o tych samych końcach i spełniające te same warunki z Definicji 8.3 to oczywiście dostaniemy po przedłużeniu f_1 tę samą funkcję f_n.

8.2 Grupa podstawowa homotopii

Definicja 8.4 Niech $D \subseteq \mathbb{C}$ obszar, $b \in D$ ustalony punkt. Przez *pętlę w D z ustalonym punktem b* rozumiemy ciągłą krzywą $\gamma\colon [0,1] \to D$ spełniającą warunek $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich pętli przez $L(D, b)$.

Definicja 8.5 Mówimy, że pętle $\gamma_0, \gamma_1 \in L(D, b)$ są *homotopijnie równoważne*, co oznaczamy $\gamma_0 \simeq \gamma_1$, jeśli pętla γ_0 może być w sposób ciągły zdeformowana do γ_1 zachowując ustalony punkt b. (To znaczy, że istnieje *homotopia* łącząca γ_0 z γ_1, czyli istnieje ciągła funkcja $H\colon [0,1] \times [0,1] \to D$ taka, że $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$, $H(0,s) = H(1,s) = b$.)

Ponieważ homotopijna równoważność $\simeq$ jest relacją równoważności, to możemy zdefiniować przestrzeń ilorazową $L(D, b)/\simeq$ złożoną z klas homotopii $[\gamma]$ dla $\gamma \in L(D, b)$.

Na zbiorze $L(D, b)$ wprowadźmy operację mnożenia pętli. Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in L(D, b)$. Wówczas

$$\gamma_1 \cdot \gamma_0(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{dla} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t-1) & \text{dla} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Oczywiście $\gamma_1 \cdot \gamma_0 \colon [0,1] \to D$ też jest pętlą w D. Tak zdefiniowane mnożenie pętli możemy przenieść na klasy homotopii biorąc

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_0] = [\gamma_1 \cdot \gamma_0]. \tag{8.1}$$

Zauważmy, że jeśli $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ i $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ to $\gamma_1 \cdot \gamma_0 \simeq \gamma_1' \cdot \gamma_0$. A to oznacza, że mnożenie klas homotopi określone przez (8.1) jest poprawnie zdefiniowane (nie zależy od wyboru reprezentanta w danej klasie homotopii).

Pokażemy, że zbiór klas homotopii $L(D,b)/\simeq$ wraz ze zdefiniowanym przez (8.1) mnożeniem tworzy grupę. Elementem neutralnym jest $[e]$, gdzie $e(t) = b$ jest pętlą równą punktowi b. Elementem odwrotnym do $[\gamma]$ jest $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$, gdzie $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Rzeczywiście, wówczas mamy $\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq e$ i $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq e$, a stąd $[\gamma]^{-1} \cdot [\gamma] = [e]$ i $[\gamma] \cdot [\gamma]^{-1} = [e]$.

Tak określoną grupę będziemy nazywać *grupą podstawową homotopii* i oznaczać przez $\Pi_1(D,b)$.

Przykład 8.6 Niech $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ i $b = \frac{1}{2}$. Oznaczmy przez γ_0 pętlę o końcach w punkcie $\frac{1}{2}$ obiegającą 0 w kierunu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wówczas $\Pi_1(D,b)$ jest wolną grupą generowaną przez $[\gamma_0]$. Innymi słowy $[\gamma] \in \Pi_1(D,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $[\gamma] = [\gamma_0]^m$. Oznacza to, że grupa $\Pi_1(D,b)$ jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z operacją dodawania.

Przykład 8.7 Niech $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, $b = \frac{1}{2}$. Oznaczmy — tak jak poprzednio — przez γ_0 pętlę o końcach w punkcie $\frac{1}{2}$ obiegającą 0 w kierunu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Oznaczmy dalej przez γ_1 pętlę o tych samych końcach i obiegającą 1 w kierunu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wówczas $\Pi_1(D,b)$ jest wolną grupą generowaną przez $[\gamma_0]$ i $[\gamma_1]$. Innymi słowy $[\gamma] \in \Pi_1(D,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $n \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0,1\}$ spełniające $[\gamma] = [\gamma_{\alpha_1}]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [\gamma_{\alpha_n}]^{m_n}$.

8.3 Grupa monodromii

Rozważmy równanie

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad a_j(t) \in \mathcal{O}(D). \tag{8.2}$$

Jeśli D nie jest jednospójny, to rozwiązania mogą być wielowartościowe. Żeby je opisać zdefiniujemy dla danego równania grupę monodromii.

Niech $U \subseteq D$ będzie jednospójnym otoczeniem b i niech $F = (f_1, \ldots, f_m)$ — fundamentalny układ rozwiązań (8.2) określonych na U. Dla dowolnego $\alpha = [\gamma] \in \Pi_1(D,b)$ rozważmy układ fundamentalny $\gamma_* F$ będący przedłużeniem analitycznym F wzdłuż drogi γ. Z jednoznaczności rozwiązań na zbiorach jednospójnych $\gamma_* F$ zależy jedynie od $[\gamma] = \alpha$, co będziemy oznaczać przez $\alpha_* F$. Zauważmy, że $\alpha_* F$ jest również układem fundamentalnym rozwiązań w U. Zatem istnieje macierz $M \in GL(m, \mathbb{C})$, $M = M(\alpha; F)$ taka, że

$$F = \alpha_* F M.$$

Stwierdzenie 8.8 *Odwzorowanie $\rho_F \colon \Pi_1(D,b) \to GL(m,\mathbb{C})$ dane wzorem $\alpha \mapsto M(\alpha; F)$ zachowuje strukturę grupy.*

Dowód. Ponieważ $e_* F = F$ to $F = FM(e,F)$. Z drugiej strony $F = F \cdot I$, gdzie $I \in GL(m, \mathbb{C})$ jest macierzą identycznościową. Oznacza to, że $M(e,F) = I$.

Zauważmy, że $(\alpha \cdot \beta)_* F = \alpha_*(\beta_* F)$. Korzystając z tego faktu i z definicji macierzy M mamy

$$\begin{aligned} F &= (\alpha \cdot \beta)_* F M(\alpha \cdot \beta, F) = \alpha_*(\beta_* F) M(\alpha \cdot \beta, F), \qquad \beta_* F = \alpha_*(\beta_* F) M(\alpha, F), \\ F &= \beta_* F M(\beta, F) = \alpha_*(\beta_* F) M(\alpha, F) M(\beta, F). \end{aligned}$$

A to oznacza, że $M(\alpha \cdot \beta, F) = M(\alpha, F) M(\beta, F)$. □

Definicja 8.9 Odwzorowanie ρ_F zachowujące strukturę grupy nazywamy *reprezentacją grupy* $\Pi_1(D,b)$, a jego obraz $\rho_f\Big(\Pi_1(D,b)\Big)$ będziemy nazywać *grupą monodromii względem* F.

Aby uniezależnić się od wyboru układu fundamentalnego rozwiązań F, zauważmy, że jeśli G jest innym fundamentalnym układem rozwiązań w otoczeniu U, to istnieje stała macierz $C \in GL(m, \mathbb{C})$, taka że $G = FC$. Mamy wówczas

$$\alpha_* FM(\alpha, F)C = FC = G = \alpha * GM(\alpha, G) = \alpha_*(FC)M(\alpha, G) = (\alpha_* F)CM(\alpha, G),$$

a stąd

$$M(\alpha, G) = C^{-1}M(\alpha, F)C \quad \text{oraz} \quad \rho_G = C^{-1}\rho_F C.$$

Oznacza to, że grupy monodromii względem F i względem G są podobne. Klasy podobieństwa będziemy nazywać *monodromią równania (8.1)*. Oczywiście monodromia zależy tylko od równania (i obszaru).

8.4 Problem Riemanna–Hilberta

Oryginalny problem Riemanna z 1857 roku dotyczył jego P-funkcji i polegał na znalezieniu równania

$$z \mapsto P \left\{ \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\}$$

spełniającego następujące warunki:
a) jest analityczne na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$;
b) każde 3 rozwiązania są liniowo zależne;
c) w każdym z osobliwych punktów a, b, c istnieją dwa niezależne rozwiązania $(z - z_0)^{\rho_1} f_1(z; z_0)$ i $(z - z_0)^{\rho_2} f_2(z; z_0)$, gdzie f_1 i f_2 są analityczne w $z = z_0$ i różne od zera. Przy czym: dla $z_0 = a$ mamy $\rho_1 = \alpha$, $\rho_2 = \alpha'$; dla $z_0 = b$ mamy $\rho_1 = \beta$, $\rho_2 = \beta'$; dla $z_0 = c$ mamy $\rho_1 = \gamma$, $\rho_2 = \gamma'$.

Wykazaliśmy w Stwierdzeniu 3.5 (strona 9), że te warunki wyznaczają P-funkcję jednoznacznie, pod warunkiem, że $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$. Rozwiązaniem jest liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu, redukujące sie do równania hipergeometrycznego. Sześć rozwiązań będzie tego typu, jeśli żadna z różnic $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ nie jest równa zeru.

Podczas II Kongresu Matematycznego w Paryżu w 1900 roku David Hilbert postawił podczas swojego słynnego wykładu między innymi taki problem (zwany XXI problemem Hilberta):

> Dla danego skończonego zbioru $S = \{a_1, \ldots, a_r, \infty\}$ i monodromii $\rho\colon \Pi_1(\mathbb{C} \setminus S, x_0) \to GL(2, \mathbb{C})$ znaleźć równanie Fuchsa rzędu 2 mające regularne punkty osobliwe w S i monodromię ρ.

Tak postawiony problem ma rozwiązanie dla $r \leqslant 2$. Dla $r \geqslant 3$ w ogólności możemy otrzymać równanie będące rozwiązaniem jedynie wtedy, gdy dopuścimy możliwość, aby oprócz punktów regularnych osobliwych z S pojawiły się tzw. *pozorne osobliwości* (ang. *apparent singularities*), czyli bieguny współczynników o trywialnej grupie monodromii.

Problem ten, zwany również problemem Hilberta–Riemana można uogólnić zastępując jedno równanie przez układ m równań pierwszego rzędu jak następuje:

> Dla danego skończonego zbioru $S = \{a_1, \ldots, a_r, \infty\}$ i monodromii $\rho\colon \Pi_1(\mathbb{C} \setminus S, x_0) \to GL(m, \mathbb{C})$ znaleźć układ m równań Fuchsa $\dot{x} = A(t)x$ mający regularne punkty osobliwe w S (tzn., że $A(t)$ jest macierzą meromorficzną o osobliwościach w punktach $t = a_i$ będących biegunami pierwszego rzędu) i monodromię ρ.

Przez dziesiątki lat wydawało się, że XXI problem Hilberta został rozwiązany przez J. Plemelj w 1908 roku. Dopiero po wielu latach odkryto lukę w jego dowodzie. W rzeczywistości Plemelj wykazał istnienie układu równań o danych osobliwościach i monodromii w szerszej klasie układów równań niż układy Fuchsa.

W przypadku tak postawione problemu w 1979 roku W. Dekkers wykazał, że odpowiedź jest pozytywna dla $m = 2$ (niezależnie od r). Natomiast w 1989 roku A. Bolibruch wykazał konstruując odpowiedni kontrprzykład, że w ogólnym przypadku odpowiedź jest negatywna.

Ćwiczenia

1. Znajdź grupę monodromii równania:
   a) $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$,
   b) $t^2\ddot{x} + \frac{1}{6}t\dot{x} + \frac{1}{6}x = 0$.

9 Rozwinięcia asymptotyczne

Rozdział ten oparty jest na książce W. Wasowa [8].

9.1 Przykład

Rozważmy równanie

$$t^2\ddot{x} + (3t-1)\dot{x} + x = 0. \tag{9.1}$$

Zauważmy, że $t = 0$ jest punktem osobliwym nieregularnym. Poszukajmy — podobnie jak w przypadku punktów osobliwych regularnych — rozwiązań w postaci szeregu Frobeniusa $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+l}$. Wstawiając do (9.1) dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+l)^2 a_{n-1}t^{n+l-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+l)a_n t^{n+l-1} = 0.$$

Skąd dla $n = 0$ dostajemy równanie indeksowe $l = 0$. Zauważmy, że w przeciwieństwie do punktów osobliwych regularnych, nasze równanie indeksowe nie jest kwadratowe ale liniowe. Dla $n \geqslant 1$ dostajemy zależność rekurencyjną

$$(n+l)^2 a_{n-1} - (n+l)a_n = 0, \quad \text{a stąd} \;\; a_n = na_{n-1}, \quad a_n = n!a_0.$$

Dla $a_0 = 1$ dostajemy rozwiązanie $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n!t^n$. Zauważmy, że otrzymany szereg jest rozbieżny dla dowolnego $t \neq 0$. Zatem dla takich t musimy na niego patrzeć jak na szereg formalny.

Przypomnijmy, że $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-s}s^n\,ds$. Zatem

$$\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_0^{\infty} e^{-s}s^n\,ds\Big)t^n.$$

Zamieńmy kolejność sumowania i całkowania. Ponieważ nie zawsze taka zamiana jest możliwa, to otrzymaną w ten sposób funkcję oznaczmy przez

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{-s}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n\Big)\,ds = \int_0^{\infty}\frac{e^{-s}}{1-st}\,ds. \tag{9.2}$$

Wykażemy, że tak zdefiniowane $x(t)$ jest rozwiązaniem (9.1) dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$. W tym celu zauważmy, że dla takich t i dla $s \in (0,\infty)$ zachodzi

$$\Big|\frac{1}{1-st}\Big| \leqslant 1, \quad \text{a stąd} \quad \Big|\int_0^{\infty}\frac{e^{-s}}{1-st}\,ds\Big| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-s}\,ds = 1,$$

więc prawa strona (9.2) ma sens. Podobnie dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ ma sens

$$\dot{x}(t) = \int_0^{\infty}\frac{se^{-s}}{(1-st)^2}\,ds, \quad \text{bo} \quad \Big|\int_0^{\infty}\frac{se^{-s}}{(1-st)^2}\,ds\Big| \leqslant \int_0^{\infty} se^{-s}\,ds = 1.$$

Różniczkując obie strony równości $tx = \int_0^{\infty}\frac{te^{-s}}{1-st}\,ds$ dostajemy

$$t\dot{x} + x = \int_0^{\infty}\frac{e^{-s}}{(1-st)^2}\,ds, \quad \text{a stąd} \quad t^2\dot{x} + tx = \int_0^{\infty}\frac{te^{-s}}{(1-st)^2}\,ds = \frac{e^{-s}}{1-st}\Big|_{s=0}^{s=\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-s}}{1-st}\,ds = -1 + x.$$

Dostaliśmy zatem, że $x(t)$ zdefiniowane przez (9.2) spełnia równanie $t^2\dot{x} + (t-1)x = -1$. Różniczkując obie strony dostajemy, że takie $x(t)$ spełnia również nasze równanie (9.1).

Zatem wychodząc z rozbieżnego szeregu $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n!t^n$ dostaliśmy dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ prawdziwe rozwiązanie $x(t) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-s}}{1-st}\,ds$. Pokażemy, że taki szereg $\widehat{x}(t)$ może służyć do przybliżania $x(t)$ w otoczeniu zera.

Niech więc $s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} k!t^k$. Wówczas dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ mamy

$$\begin{aligned} x(t) - s_n(t) &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \sum_{k=0}^{n} k!t^k = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \sum_{k=0}^{n}\Big(\int_0^\infty e^{-s}s^k\,ds\Big)t^k \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \int_0^\infty e^{-s}\sum_{k=0}^{n}(st)^k\,ds = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \int_0^\infty e^{-s}\frac{1-(st)^{k+1}}{1-st}\,ds = \int_0^\infty e^{-s}\frac{(st)^{k+1}}{1-st}\,ds. \end{aligned}$$

A stąd

$$|x(t) - s_n(t)| \leqslant |t|^{n+1}\int_0^\infty s^{n+1}e^{-s}\,ds = (n+1)!|t|^{n+1}.$$

Oznacza to, że błąd jest co do modułu nie większy niż pierwszy pominięty składnik $(n+1)!t^{n+1}$. Przypomnijmy, że interesuje nas zachowanie rozwiązania w otoczeniu $t = 0$. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$ mamy $\lim_{t\to 0^-} \frac{x(t)-s_n(t)}{t^n} = 0$ (tzn. że szereg $\widehat{x}$ jest asymptotyczny do $x(t)$ przy $t \to 0^-$), ale $\lim_{n\to\infty} |x(t) - s_n(t)| \neq 0$ (tzn. że szereg $\widehat{x}$ nie jest zbieżny do $x(t)$).

9.2 Wprowadzenie rozwinięcia asymptotycznego

Definicja 9.1 (Poincaré, 1886) Niech funkcja $f(t)$ będzie określona na obszarze $S \subset \mathbb{C}$, $0 \in \partial S$. Mówimy, że szereg potęgowy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ jest *rozwinięciem asymptotycznym $f(t)$ na S przy $t \to 0$* jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t\to 0,\, t\in S} \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k}{t^n} = 0.$$

Będziemy to oznaczać przez $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$.

W dalszej części zajmiemy się badaniem własności rozwinięć asymptotycznych.

Stwierdzenie 9.2 (Jednoznaczność rozwinięć asymptotycznych) *Dla danej funkcji $f(t)$ istnieje co najwyżej jedno rozwinięcie asymptotyczne $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ przy $t \to 0$ w zadanym zbiorze S.*

Dowód. Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$, to w szczególności musi być

$$\lim_{t\to 0,\, t\in S} f(t) = \lim_{t\to 0,\, t\in S} a_0 = a_0 \quad \text{i} \quad \lim_{t\to 0,\, t\in S} \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k}{t^n} = \lim_{t\to 0,\, t\in S} \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + a_n t^n}{t^n} = a_n \ (n > 0).$$

Zauważmy, że powyższe równania w sposób jednoznaczny wyznaczają rozwinięcie asymptotyczne $f(t)$. □

Dana funkcja definiuje w sposób jednoznaczny rozwinięcie asymptotyczne, ale nie na odwrót! Mając rozwinięcie asymptotyczne nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jednoznacznie funkcji. W szczególności bowiem mamy dla $f(t) \equiv 0$ i $g(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, że $f(t) \sim 0$ i $g(t) \sim 0$ dla $t \to 0$, $\operatorname{Re} t > 0$.

9.3 Własności algebraiczne rozwinięć asymptotycznych

Bezpośrednio z definicji rozwinięcia asymptotycznego dostajemy

Stwierdzenie 9.3 (Liniowość rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ i $g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$ to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ zachodzi $\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)t^k$, $t \in S$, $t \to 0$.*

Mamy również

Stwierdzenie 9.4 (Mnożenie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ i $g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$ to $f(t)g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, gdzie $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.*

Dowód. Z założenia

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \quad \text{i} \quad g(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + E_2(t,n)t^n,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_1(t,n) = 0$ i $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_2(t,n) = 0$. Wówczas

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k + E_3(t,n)t^n \quad \text{dla pewnego } E_3(t,n) \text{ spełniającego} \quad \lim_{t\to 0,\, t\in S} E_3(t,n) = 0.$$

□

Podobnie zachodzi

Stwierdzenie 9.5 (Złożenie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $t \in S$ i $g(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$ dla $u \in T$ oraz jeśli $f(t) \in T$ dla $t \in S$ to $g(f(t)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ dla $t \in S$, gdzie współczynniki c_k są takie, aby $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m \Big)^l$.*

Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} f(t) = a_0$ a z drugiej strony dla $t \in S$ zachodzi $f(t) = u$ i $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} f(t) = \lim\limits_{u\to 0,\, u\in T} u = 0$ to musimy założyć, że $a_0 = 0$.

Z założenia

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \quad \text{i} \quad g(u) = \sum_{l=0}^{n} b_l u^l + E_2(u,n)u^n,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_1(t,n) = 0$ i $\lim\limits_{u\to 0,\, u\in T} E_2(u,n) = 0$. Wówczas

$$g(f(t)) = \sum_{l=0}^{n} b_l \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \Big)^l + E_2(u,n) \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \Big)^n = \sum_{m=0}^{n} c_m t^m + E_3(t,n)t^n$$

dla pewnego $E_3(t,n)$ spełniającego $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_3(t,n) = 0$. □

9.4 Własności analityczne rozwinięć asymptotycznych

Dalsze własności rozwinięć asymptotycznych będą dotyczyły funkcji analitycznych.

Stwierdzenie 9.6 *Niech $S = \{t \in \mathbb{C} \colon 0 < |t| < t_0\}$ i $f \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$. Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \to 0$, $t \in S$, to szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$jest zbieżny do f dla $|t| < t_0$.*

Dowód. Mamy $\lim_{t\to\, 0} f(t) = a_0$, więc można przedłużyć f na $|t| < t_0$ przyjmując $f(0) = a_0$. Wówczas funkcja f staje się analityczna dla $|t| < t_0$ i rozwija się w szereg potęgowy na tym zbiorze, który jest jednocześnie rozwinięciem asymptotycznym f. Z jednoznaczności rozwinięć asymptotycznych (Stwierdzenie 9.2) musi być $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $|t| < t_0$. □

W dalszym ciągu będziemy się głównie zajmować obszarami $S \subset \mathbb{C}$ zwanymi *sektorami*, tzn.

$$S = \{z = re^{i\phi} \in \mathbb{C} \colon r \in (0,R),\ \phi \in (\phi_0, \phi_1)\}.$$

Stwierdzenie 9.7 (Całkowanie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$, S — sektor i $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \to 0$, $t \in S$ to*

$$\int_0^t f(s)\, ds \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} \quad \textit{dla} \quad t \in S. \tag{9.3}$$

Dowód. Ponieważ S jest sektorem, to $(0,t]\subset S$, a stąd całka z lewej strony (9.3) ma sens. Z założenia

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k+E(t,n)t^n,\quad \text{gdzie}\quad \lim_{t\to 0,\,t\in S}E(t,n)=0.$$

Zatem

$$\int_0^t f(s)\,ds=\sum_{k=0}^{n}\int_0^t a_ks^k\,ds+\int_0^t E(s,n)s^n\,ds=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}t^{k+1}+\int_0^t E(s,n)s^n\,ds,$$

gdzie po zamianie zmiennych $s=\sigma t$

$$\int_0^t E(s,n)s^n\,ds=t^{n+1}\int_0^1 E(\sigma t,n)\sigma^n\,d\sigma\longrightarrow 0\quad \text{przy}\quad t\to 0,\ t\in S.$$

□

Nie da się otrzymać podobnego wyniku, gdybyśmy zamiast całkowania wzieli różniczkowanie rozwinięć asymptotycznych. Prostym kontrprzykładem jest funkcja

$$f(t)=e^{-\frac{1}{t}}\sin(e^{\frac{1}{t}}),\quad \text{dla której zachodzi}\quad f(t)\sim 0 \text{ przy } t\to 0,\ t>0.$$

Z drugiej strony zaś

$$f'(t)=t^{-2}\Big(e^{-\frac{1}{t}}\sin(e^{\frac{1}{t}})-\cos(e^{\frac{1}{t}})\Big)\quad \text{i nie istnieje granica}\quad \lim_{t\to 0,\ t>0}f'(t).$$

Natomiast zachodzi

Stwierdzenie 9.8 (Różniczkowanie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t)\in\mathcal{O}(S)$ dla $S=\{t\in\mathbb{C}\colon 0<|t|<t_0,\ \theta_1<\arg t<\theta_2\}$ spełnia $f(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k$ dla $t\in S$, $t\to 0$, to*

$$f'(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}ka_kt^{k-1}\quad \textit{dla}\quad t\to 0,\ t\in S^*=\{t\in\mathbb{C}\colon 0<|t|<t_0^*<t_0,\ \theta_1<\theta_1^*<\arg t<\theta_2^*<\theta_2\}\ \textit{— podsektora } S.$$

Dowód. Mamy

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k+E(t,n)t^n,\quad f'(t)=\sum_{k=0}^{n}ka_kt^{k-1}+nt^{n-1}E(t,n)+t^nE'(t,n),\quad \text{gdzie}\ \lim_{t\to 0,\,t\in S}E(t,n)=0.$$

Niech α takie, że dla każdego $t\in S^*$ kula $B(t,\alpha|t|)$ o środku w t i promieniu $\alpha|t|$ jest zawarta w S i niech $M(t,n)=\max_{t\in B(t,\alpha|t|)}|E(t,n)|$. Wówczas z nierówności Cauchy'ego $|E'(t,n)|\leqslant\frac{M(t,n)}{|t|\alpha}$ i zachodzi

$$\Big|f'(t)-\sum_{k=0}^{n}ka_kt^{k-1}\Big|\leqslant|t|^{n-1}\Big(nE(t,n)+\frac{M(t,n)}{\alpha}\Big)\longrightarrow 0\quad \text{przy}\quad t\to 0,\ t\in S^*.$$

□

Stwierdzenie 9.9 (Formuła Taylora dla rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t)\in\mathcal{O}(S)\cap C^0(\overline{S})$ dla sektora $S\subset\mathbb{C}$ i istnieją granice $f_r=\lim_{t\to 0,\ t\in S}f^{(r)}(t)$ dla $r\in\mathbb{N}_0$, to*

$$f(t)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k!}t^k\quad \textit{dla}\quad t\in S,\ t\to 0.$$

Dowód. Niech $S\subset\mathbb{C}$ sektor, $f(t)\in S$. Korzystając z formuły Taylora dla dowolnego $a\in S$ mamy

$$f(t)=f(a)+\frac{t-a}{1!}f'(a)+...+\frac{(t-a)^m}{m!}f^{(m)}(a)+\frac{1}{m!}\int_a^t(t-s)^mf^{(m+1)}(s)\,ds.$$

Jeśli istnieją granice $\lim_{t\to 0,\ t\in S}f^{(r)}(t)$, to zamiast a można wziąć 0. Wobec tego stwierdzenie wynika z oszacowania reszty

$$\Big|\frac{1}{m!}\int_a^t(t-s)^mf^{(m+1)}(s)\,ds\Big|\leqslant\sup_{t\in S}|f^{(m+1)}(t)|\frac{1}{m!}\int_0^{|t|}|t-s|^m\,ds=\sup_{t\in S}|f^{(m+1)}(t)|\frac{|t|^{m+1}}{m!}\int_0^1(1-s)^m\,ds.$$

□

9.5 Twierdzenie Ritta

Pokazywaliśmy wcześniej, że dla danego rozwinięcia asymptotycznego nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć funkcji o tym rozwinięciu. Okazuje się natomiast, że można udowodnić istnienie funkcji o zadanym rozwinięciu. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 9.10 (Ritt, 1916) *Dla dowolnego szeregu formalnego $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ i dowolnego sektora S istnieje funkcja $f(t)$ analityczna w tym sektorze dla $|t| < t_0$ i taka, że $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $t \in S$, $t \to 0$.*

Dowód. Ponieważ $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ w S wtedy i tylko wtedy gdy $g(t) = f(te^{-i\theta}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\theta} k t^k$ w $Se^{-i\theta}$, więc bez straty ogólności możemy założyć, że wektor S jest symetryczny względem osi rzeczywistej i ograniczony półprostymi $\arg t = \pm\gamma$. Możemy więc przyjąć $S = \{t = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon r \in (0,1),\ \phi \in (-\gamma, \gamma)\}$.

Idea dowodu polega na zastąpieniu naszego szeregu przez nowy zmodyfikowany szereg typu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^k$, gdzie $\alpha_k(t)$ wybieramy w ten sposób, aby uzbieżnić szereg i jednocześnie nie zmienić asymptotyki (tzn. $\alpha_k(t)$ małe dla $t \neq 0$ i szybko zbieżne do 1 dla $t \to 0$. Np. $\alpha_k(t) = 1 - e^{-\frac{b_k}{t^\beta}}$ dla $b_k > 0$ i $\beta \in (0,1)$. Ponieważ $|1 - e^z| < |z|$ dla $\operatorname{Re} z < 0$, to $|a_k \alpha_k(t) t^k| \leqslant |a_k||b_k||t|^{k-\beta}$ dla $t \in S$. Jeśli teraz przyjmiemy

$$b_k = \begin{cases} |a_k|^{-1} & \text{dla} \quad a_k \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad a_k = 0 \end{cases},$$

to dla $t \in S$ zachodzi oszacowanie $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |t|^{k-\beta} < \infty$, co dowodzi zbieżności.

Zatem wystarczy pokazać, że dla $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^k$ zachodzi $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $t \in S$. Mamy bowiem

$$t^{-m}\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{m} a_k t^k\Big) = -\sum_{k=0}^{m} a_k e^{-\frac{b_k}{t^\beta}} t^{-(m-k)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^{k-m} \longrightarrow 0 \quad \text{dla} \quad t \to 0,\ t \in S,$$

gdyż dla $|t| \leqslant t_0$

$$\Big| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^{k-m} \Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |t|^{k-m-\beta} \leqslant \frac{|t|^{1-\beta}}{1-|t|}.$$

□

9.6 Rozwinięcia asymptotyczne w nieskończoności

Dotychczas zajmowaliśmy się badaniem rozwinięć asymptotycznych w otoczeniu zera. W podobny sposób można badać rozwinięcia w otoczeniu dowolnego $a \in \mathbb{C}$. Możemy również mówić o rozwinięciach asymptotycznych wokół nieskończoności. Ten ostatni przypadek otrzymujemy z rozwinięć wokół zera zastępując t przez t^{-1}. W szczególności mamy

Definicja 9.11 Niech funkcja $f(t)$ będzie określona na obszarze nieograniczonym $\widetilde{S} \subset \mathbb{C}$. Mówimy, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$ jest *rozwinięciem asymptotycznym $f(t)$ na $\widetilde{S}$ przy $t \to \infty$* jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t\to\infty,\, t\in\widetilde{S}} t^n \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{-k} \Big) = 0.$$

Będziemy to oznaczać przez $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$, $t \in \widetilde{S}$, $t \to \infty$.

Ćwiczenia

1. Znaleźć rozwinięcie asymptotyczne w ∞ funkcji
   a) $\operatorname{Ei}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^s}{s}\, ds$ dla $t < 0$,
   b) $f(t) = \int_t^{\infty} e^{t^2 - s^2}\, ds$,
   c) $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{1+s^2}\, ds$.
2. Znaleźć rozwiązanie formalne $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ równania i pokazać, że powstały szereg jest rozbieżny dla $t \neq 0$
   a) $t^3 \ddot{x} + (t^2 + t)\dot{x} - x = 0$.

10 Rozwinięcia asymptotyczne i sumowalność w sensie Borela

Główne twierdzenie o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych pochodzi z monografii W. Wasowa [8]. Część dotycząca sumowalności w sensie Borela pochodzi z książki W. Balsera [2].

10.1 Główne twierdzenie o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych

Zaczniemy od rozszerzenia pojęcia punktów osobliwych równania na układy liniowe postaci

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{10.1}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_m)$ jest wektorem, zaś $A(t)$ macierzą o meromorficznych współczynnikach.

Definicja 10.1 Punkt $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym* równania (10.1) jeśli któryś ze współczynników macierzy $A(t)$ ma biegun w t_0.

Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym regularnym* równania (10.1) jeśli współczynniki macierzy $(t - t_0)A(t)$ są już analityczna w t_0.

Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym nieregularnym* równania (10.1) jeśli któryś ze współczynników macierzy $(t - t_0)A(t)$ ma biegun w t_0.

Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym rangi* r ($r \in \mathbb{N}_0$) równania (10.1) jeśli współczynniki macierzy $(t - t_0)^r A(t)$ nie są analityczna w t_0, zaś współczynniki macierzy $(t - t_0)^{r+1}A(t)$ są już analityczne w t_0.

Zauważmy, że punkty osobliwe rangi 0 są punktami osobliwymi regularnymi, zaś punkty osobliwe rangi większej od zera są punktami osobliwymi nieregularnymi.

Możemy również zdefiniować rangę punktu osobliwego dla równania n-tego rzędu postaci

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + ... + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0. \tag{10.2}$$

Definicja 10.2 Punkt osobliwy $t = t_0$ nazywamy *punktem osobliwym rangi* r jeśli $r \in \mathbb{N}_0$ jest najmniejszą liczbą dla której $(t - t_0)^{(r+1)m}a_0(t)$, ..., $(t - t_0)^{r+1}a_{m-1}(t)$ są analityczne w otoczeniu t_0.

Możemy teraz sformułować główne twierdzenie o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych.

Twierdzenie 10.3 *Niech $r \in \mathbb{N}_0$, $S \subset \mathbb{C}$ sektor o rozwartości co najwyżej $\frac{\pi}{r+1}$. Załóżmy, że $t_0 = 0$ jest punktem osobliwym rangi r układu m równań (10.1) (tzn. $t^{r+1}A(t)$ jest analityczne w otoczeniu zera) i macierz $t^{r+1}A(t)\Big|_{t=0}$ ma różne od zera wartości własne λ_1, ..., λ_m. Wówczas jeśli $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest rozwiązaniem formalnym (10.1), to istnieje $x(t) \in \mathcal{O}(S \cap \{|t| < \epsilon\})$ (dla pewnego $\epsilon > 0$) będące prawdziwym rozwiązaniem (10.1) i takie, że $x(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S^*$, $t \to 0$, gdzie S^* — dowolny podsektor S.*

Idea dowodu. (Cały dowód można znaleźć w monografii W. Wasowa [8].) Niech $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ będzie rozwiązaniem formalnym układu (10.1). Z twierdzenia Ritta (Twierdzenie 9.10) istnieje $\phi(t) \in \mathcal{O}(S \cap \{|t| < \epsilon_1\})$ takie, że $\phi(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S$, $t \to 0$. Korzystając ze stwierdzeń liniowości, mnożeniu i różniczkowaniu rozwinięć asymptotycznych (Stwierdzenia 9.3, 9.4 i 9.8) dostajemy

$$\dot{\phi}(t) - A(t)\phi(t) \sim \dot{\widehat{x}}(t) - A(t)\widehat{x}(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in S^*, \ t \to 0.$$

Zatem wprowadzając oznaczenie $b(t) = \dot{\phi}(t) - A(t)\phi(t)$ dostajemy $b(t) \sim 0$ dla $t \in S^*$, $t \to 0$.

Niech dalej $x(t) \in \mathcal{O}(S \cap \{|t| < \epsilon_2\}$ będzie prawdziwym rozwiązaniem (10.1) i niech $u(t) = x(t) - \phi(t)$. Wówczas

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\phi}(t) = A(t)x(t) - A(t)\phi(t) - b(t) = A(t)\Big(x(t) - \phi(t)\Big) - b(t) = A(t)u(t) - b(t). \tag{10.3}$$

Należy jeszcze pokazać, że dla pewnego rzeczywistego rozwiązania $x(t)$ istnieje $u(t)$ będące rozwiązaniem (10.3) i spełniające warunek $u(t) \sim 0$ dla $t \in S^*$, $t \to 0$ (dowód w [8]). Wówczas $x(t) \sim \phi(t)$, a ponieważ również $\phi(t) \sim \widehat{x}(t)$, to $x(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S^*$ i $t \to 0$. □

10.2 Procedura sumowalności w sensie Borela

Zostanie teraz przedstawiona procedura dzięki której z rozbieżnego szeregu otrzymamy funkcję analityczną w pewnym sektorze. Dzięki temu dla danego rozwiązania formalnego $\widehat{x}(t)$ w punkcie osobliwym nieregularnym będziemy mogli znaleźć rozwiązanie prawdziwe $x(t)$ spełniające $x(t) \sim \widehat{x}(t)$ dla $t \in S$, $t \to 0$).

W tym celu uzbieżniamy szereg formalny $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ stosując *formalną transformację Borela*

$$\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Transformacja Laplace'a

$$\mathcal{L}_1 g(t) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} g(s) e^{-\frac{s}{t}}\, ds$$

jest operacją odwrotną, gdyż podstawiając $\frac{s}{t} = \xi$ dostajemy

$$\mathcal{L}_1\Big(\frac{a_n}{n!} t^n\Big) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} s^n e^{-\frac{s}{t}}\, ds = \int_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \xi^n e^{-\xi}\, d\xi = \frac{a_n}{n!} t^n \int_0^{\infty} \xi^n e^{-\xi}\, d\xi = \frac{a_n}{n!} t^n \Gamma(n+1) = a_n t^n.$$

Zatem wychodząc z szeregu formalnego $\widehat{x}(t)$ dochodzimy do funkcji analitycznej w sektorze $x(t) = \mathcal{L}_1 \widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$. Aby to miało sens musi być spełnionych kilka warunków:

1. Szereg $\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$ jest zbieżny (tzn. istnieją $A, B < \infty$ takie, że $|a_n| \leqslant AB^n n!$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$).
2. $\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$ przedłuża się do funkcji analitycznej w sektorze $S(0, \alpha)$, czy ogólniej $S(d, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} \colon \arg z \in (d - \frac{\alpha}{2}, d + \frac{\alpha}{2})\}$ i wzrostu eksponencjalnego rzędu 1 w ∞ (tzn. $|\widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)| \leqslant Ce^{at}$ dla pewnych $C, a < \infty$).

Zauważmy, że $\mathcal{L}_1 \widehat{\mathcal{B}}_1 \widehat{x}(t)$ jest funkcją analityczną w sektorze wokół zera dla $\operatorname{Re} t > 0$. Ponadto zamiast $\frac{1}{t} \int_0^{\infty} g(s) e^{-\frac{s}{t}}\, ds$ można wziąć $\frac{1}{t} \int_0^{\infty e^{i\phi}} g(s) e^{-\frac{s}{t}}\, ds$ dla dowolnego $|\phi - d| < \frac{\alpha}{2}$. Dla każdego ϕ operator Laplace'a jest analityczny w sektorze $S(\phi, \pi)$. Zatem biorąc różne ϕ przedłużamy analitycznie tę funkcję do $S(d, \pi + \alpha)$.

10.3 Szeregi i rozwinięcia asymptotyczne Gevreya

Zdefiniujemy pewne „pośrednie" szeregi pomiędzy zbieżnymi a dowolnymi formalnymi.

Definicja 10.4 Szereg formalny $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ nazywamy *szeregiem Gevreya rzędu* s jeśli istnieją stałe $A, B < \infty$ takie, że

$$|a_n| \leqslant AB^n (n!)^s \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

co będziemy oznaczać poprzez $\widehat{x} \in \mathbb{C}[t]_s$.

Zauważmy, że szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $s \leqslant 0$. Dla $s = 0$ promień zbieżności jest skończony i szacuje się przez $R \leqslant \frac{1}{B}$. Natomiast dla $s < 0$ promień jest nieskończony (szereg przedłuża się do funkcji całkowitej).

Dla tak zdefiniowanych szeregów wprowadźmy odpowiednią asymptotykę.

Definicja 10.5 Mówimy, że funkcja $x(t)$ zdefiniowana w sektorze $S \subset \mathbb{C}$ posiada *rozwinięcie asymptotyczne Gevreya rzędu* s, $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{C}[t]_s$ jeśli w każdym podsektorze S^* sektora S istnieją stałe $A, B < \infty$ takie, że

$$\Big| x(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \Big| \leqslant AB^N (N!)^s |t|^{N+1} \quad \text{dla każdego} \quad N \in \mathbb{N}_0,\ t \in S^*,$$

co będziemy oznaczać poprzez $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$.

Zauważmy, że jeśli $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$ to również $x(t) \sim \widehat{x}(t)$. Podobnie jeśli $s_1 < s_2$ oraz $x(t) \sim_{s_1} \widehat{x}(t)$ to również $x(t) \sim_{s_2} \widehat{x}(t)$. Dla asymptotyki Gevreya zachodzą podobne stwierdzenia jak i dla asymptotyki Poincaré (własności algebraiczne rozwinięć asymptotycznych, całkowanie i różniczkowanie). Zachodzą również następujące fakty

Stwierdzenie 10.6 (Ritta dla asymptotyki Gevreya) *Dla $s > 0$ niech $\widehat{x} \in \mathbb{C}[t]_s$ i S — sektor o rozwartości równej co najwyżej $s\pi$. Wówczas istnieje $x(t) \in \mathcal{O}(S)$ takie, że $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$ w S.*

Stwierdzenie 10.7 (Lemat Watsona) *Niech S — sektor o rozwartości większej od $s\pi$, $s > 0$ i niech $x(t) \in \mathcal{O}(S)$ spełnia $x(t) \sim_s 0$ w S. Wówczas $x(t) \equiv 0$ w S.*

Uwaga 10.8 *Niech odwzorowanie $J\colon \mathcal{O}(S) \to \mathbb{C}[t]_s$ będzie dane wzorem $J(x(t)) = \widehat{x}(t)$ wtedy i tylko wtedy gdy $x(t) \sim_s \widehat{x}(t)$ w S. Wówczas jeśli rozwartość S jest:*
$\leqslant s\pi$ to J jest odwzorowaniem „na”;
$> s\pi$ to J jest odwzorowaniem różnowartościowym.

10.4 Sumowalność w sensie Borela

Definicja 10.9 *Operatorem Laplace'a rzędu k w kierunku d* nazywamy operator

$$\mathcal{L}_{k,d}x(t) = t^{-k} \int_0^{e^{id}\infty} x(s)e^{-(\frac{s}{t})^k}\, ds^k.$$

Zauważmy, że jeśli $x(t) \in \mathcal{O}^k\Big(S(d,\alpha)\Big)$ (analityczne na $S(d,\alpha)$ i eksponencjalne rzędu co najwyżej k przy $t \to \infty$) to $\mathcal{L}_{k,d}x(t) \in \mathcal{O}\Big(S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})\Big)$.

Definicja 10.10 *Formalnym operatorem Borela rzędu k* nazywamy operator

$$\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})} t^n.$$

Zauważmy, że jeśli $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ jest rzędu Gevreya s, to $\widehat{\mathcal{B}}_{\frac{1}{s}}\widehat{x}(t)$ analityczne w otoczeniu zera.

Definicja 10.11 Mówimy, że szereg $\widehat{x}(t)$ jest 1-*sumowalny w kierunku d* jeśli zachodzą równoważne warunki:

1. Można do niego zastosować metodę sumowania Borela-Laplace w kierunkach z otoczenia kierunku d: $x(t) = \mathcal{L}_{1,d}\Big(\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}\Big)(t)$.
2. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[t]_1$ oraz $\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x} \in \mathcal{O}^1\Big(S(d,\alpha)\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$.
3. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[t]_1$ oraz istnieje $x \in \mathcal{O}\Big(S(d,\alpha+\pi)\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$, takie że $x \sim_1 \widehat{x}$ w $S(d,\alpha+\pi)$.

Zauważmy, że z lematu Watsona (Stwierdzenie 10.7) wynika jednoznaczność x takiego że $x \sim_1 \widehat{x}$ w $S(d,\alpha+\pi)$.

Definicja 10.12 Szereg formalny $\widehat{x}$ jest 1-*sumowalny* jeśli jest on 1-sumowalny w każdym kierunku z wyjątkiem skończonej liczby kierunków osobliwych.

Podobnie zdefiniujemy k-sumowalność.

Definicja 10.13 Mówimy, że szereg $\widehat{x}(t)$ jest *k-sumowalny w kierunku d* jeśli zachodzą równoważne warunki:

1. Można do niego zastosować metodę sumowania Borela-Laplace w kierunkach z otoczenia kierunku d: $x(t) = \mathcal{L}_{k,d}\Big(\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x}\Big)(t)$.
2. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[t]_{\frac{1}{k}}$ oraz $\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x} \in \mathcal{O}^k\Big(S(d,\alpha)\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$.
3. $\widehat{x} \in \mathbb{C}[t]_{\frac{1}{k}}$ oraz istnieje $x \in \mathcal{O}\Big(S(d,\alpha+\frac{\pi}{k})\Big)$ dla pewnego $\alpha > 0$, takie że $x \sim_{\frac{1}{k}} \widehat{x}$ w $S(d,\alpha+\frac{\pi}{k})$.

Definicja 10.14 Szereg formalny $\widehat{x}$ jest *k-sumowalny* jeśli jest on k-sumowalny w każdym kierunku z wyjątkiem skończonej liczby kierunków osobliwych.

Zauważmy, że przy ustalonym kierunku d szereg 1-sumowalny spełnia słabszy warunek ale na sektorze o rozwartości większej niż π, natomiast szereg 2-sumowalny wymaga spełnienia silniejszego warunku ale za to tylko na sektorze o rozwartości większej niż $\frac{\pi}{2}$.

Okazuje się jednak, że czasami sama k-sumowalność nie wystarcza i dlatego wprowadzimy jeszcze pojęcie mulisumowalności.

Definicja 10.15 Szereg $\widehat{x}(t)$ jest $(k_1, ..., k_n)$-*multisumowalny* jeśli $\widehat{x}(t) = \widehat{x}_1(t) + ... + \widehat{x}_n(t)$ oraz $\widehat{x}_i(t)$ jest k_i-sumowalny $(i = 1, ..., n)$.

Zachodzi

Twierdzenie 10.16 (Braaksma, 1992) *Każde rozwiązanie formalne równania zwyczajnego o meromorficznych współczynnikach jest multisumowalne.*

Dla równania (10.2) jeśli rozwiązanie formalne $\widehat{x}(t)$ jest k-sumowalne i $x(t) = \mathcal{L}_{k,d}\Big(\widehat{\mathcal{B}}_k\widehat{x}\Big)(t)$ to $x \sim_{\frac{1}{k}} \widehat{x}$ na $S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$ $(\alpha > 0)$. Z lematu Watsona (Stwierdzenie 10.7) jest to jedyna funkcja spełniająca tę asymptotykę. Z drugiej strony powtarzając dowód głównego twierdzenia o istnieniu dla rozwinięć asymptotycznych (Twierdzenie 10.3) mamy, że jeśli $y(t)$ jest rozwiązaniem to również $y \sim_{\frac{1}{k}}$ na $S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$. Zatem z jednoznaczności $y = x$, czyli otrzymane w wyniku procedury sumowalności $x(t)$ jest prawdziwym rozwiązaniem równania (10.2).

Ćwiczenia

1. Znajdź punkty osobliwe danego równania. Określ ich rangę.
   a) $t^4(1-t)^3\ddot{x} + t^2(t+1)\dot{x} + (1-t)x = 0$,
   b) $t^3(t^2-4)\ddot{x} + t^4\dot{x} + tx = 0$.

2. Sprawdź jakiego rzędu Gevreya s jest dany szereg formalny. Uwaga: w tym ćwiczeniu może być pomocny wzór Stirlinga: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ dla dużych n.
   a) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n t^n$,
   b) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n t^{2n}$,
   c) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2n} t^n$,
   d) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n)! t^{2n}$.

3. Przeprowadź procedurę 1-sumowalności dla danego szeregu formalnego.
   a) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)! t^n$,
   b) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n)! t^{2n+1}$.

11 Przykłady sumowalności w sensie Borela. Diagram Newtona i zjawisko Stokesa

11.1 Diagram Newtona

Rozważmy równanie

$$(11.1)\quad P(t,\frac{d}{dt}) = b_m(t)x^{(m)} + ... + b_1(t)\dot{x} + b_0(t)x = 0, \quad \text{gdzie} \quad b_i(t) = \sum_{j=0}^{m} b_{i,j}t^j \text{ jest analityczne w otoczeniu zera.}$$

Definicja 11.1 Dla danego równania (11.1) możemy zdefiniować zbiór $\mathcal{N}_P = \{(i, j-i) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}\colon b_{i,j} \neq 0\}$ zwany *diagramem Newtona*. Podobnie *wielokątem Newtona* mazywamy zbiór $\operatorname{conv}(\mathcal{N}_P + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+)$ (tzn. uwypuklenie zbioru $\mathcal{N}_P + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$).

Zobaczmy jak wygląda wielokąt Newtona w zależności od tego, jakiego rodzaju punktem jest $t_0 = 0$.

Niech $t_0 = 0$ będzie punktem nieosobliwym równania (11.1). Wówczas w równaniu tym możemy przyjąć $b_m(t) \equiv 1$, czyli $b_{m,0} = 1$ i wielokąt Newtona jest równy $(m, -m) + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$.

Niech $t_0 = 0$ będzie punktem osobliwym regularnym równania (11.1). Oznacza to, że współczynniki tego równania można zapisać w postaci: $b_m(t) = t^m$ (czyli $b_{m,m} = 1$) oraz $b_i(t) = t^{m-i}a_i(t)$, gdzie $a_i(t)$ analityczne w otoczeniu zera (czyli $b_{i,j} = 0$ dla $j \leqslant i$) zaś $i = 0, ..., m-1$. Wobec tego wielokąt Newtona jest równy $(m, 0) + \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$.

Niech $t_0 = 0$ będzie punktem osobliwym nieregularnym rangi r ($r \geqslant 1$) równania (11.1). Wówczas współczynniki tego równania można zapisać w postaci: $b_m(t) = t^{(r+1)m}$ czyli $b_{m,(r+1)m} = 1$) oraz $b_i(t) = t^{(r+1)(m-i)}a_i(t)$, gdzie $a_i(t)$ analityczne w otoczeniu zera (czyli $b_{i,j} = 0$ dla $j \leqslant (r+1)i$) zaś $i = 0, ..., m-1$. Wobec tego wielokąt Newtona jest ograniczony bokami $(-\infty, 0) - (0, 0) - (m, rm) - (m, +\infty)$. Zatem w szczególności jeśli $t_0 = 0$ jest punktem osobliwym nieregularnym to istnieje odcinek o nachyleniu dodatnim do osi poziomej.

Zauważmy, że dopiero w tym ostatnim przypadku znalazł się bok różny od poziomego i pionowego. Współczynnik nachylenia tego boku (tzn tangens nachylenia boku do poziomu) wynosi $\kappa = r$, gdzie κ będziemy nazywać niezmiennikiem Katza. Mówiąc precyzyjniej mamy

Definicja 11.2 *Niezmiennikiem Katza* κ dla danego wielokąta Newtona (a więc i dla danego równania) nazywamy najmniejszy niezerowy współczynnik nachylenia boków do poziomu.

Zauważmy też, że rząd Gevreya rozwiązania formalnego dla danego równania jest równy $\frac{1}{\kappa}$, gdzie κ jest niezmiennikiem Katza dla danego równania.

Z wielokąta Newtona możemy też wnioskować o liczbie rozwiązań formalnych (danych w postaci szeregu Frobeniusa) — jest ona równa długości odcina poziomego wychodzącego z punktu $(0, 0)$. Również wielokąt Newtona dostarcza informacji o sumowalności. Mówiąc precyzyjniej, aby dany szereg był k-sumowlany, musi istnieć odcinek o nachyleniu równym k.

11.2 1-sumowalność

Rozważmy następujące równanie Eulera

$$(11.2)\qquad t^2\dot{x} + x = t.$$

Jego rozwiązanie formalne ma postać $\widehat{x}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! t^{n+1}$. Natomiast prawdziwe rozwiązanie ogólne równania (11.2) jest równe $x(t) = ce^{1/t} + \int_0^t \frac{e^{1/t}e^{-1/s}}{s}\,ds$. Biorąc rozwiązanie szczególne ($c = 0$) i dokonując zamiany zmiennych $\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{\xi}{t}$ dostajemy

$$(11.3)\qquad x_1(t) = \int_0^t \frac{e^{1/t}e^{-1/s}}{s}\,ds = \int_0^\infty \frac{1}{\xi+1}e^{-\xi/t}\,d\xi \quad \text{dla} \quad t > 0.$$

Znajdziemy teraz związek pomiędzy rozwiązaniem formalnym $\widehat{x}_1(t)$ a rozwiązaniem prawdziwym $x_1(t)$. W tym celu zauważmy, że

$$\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\xi^n + \frac{(-1)^N\xi^N}{1+\xi} \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi/t}\,d\xi = n!t^{n+1},$$

więc dla t należących do dowolnego podsektora S^* zawartego w $S(0,\pi) = \{t \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} t > 0\}$ zachodzi

$$\Big|x_1(t) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n n! t^{n+1}\Big| = \Big|\int_0^\infty \frac{\xi^N e^{-\xi/t}}{1+\xi}\,d\xi\Big| \leqslant \int_0^\infty \xi^N e^{-\xi \operatorname{Re}(1/t)}\,d\xi \leqslant N!\Big(\frac{1}{\operatorname{Re}(1/t)}\Big)^{N+1} \leqslant CB^N N! |t|^{N+1}.$$

Oznacza to, że $x_1(t) \sim_1 \widehat{x}_1(t)$.

Wróćmy do naszego równania (11.2). Ponieważ diagram Newtona jest zdefiniowany dla równań liniowych jednorodnych, to spróbujemy przekształcić nasze równanie w ten sposób, by otrzymać równanie jednorodne o takim samym rozwiązaniu formalnym co równanie wyjściowe. W tym celu obie strony (11.2) podzielmy przez t a następnie zróżniczkumy (względem t). Otrzymamy wówczas równanie

$$t\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} - \frac{1}{t^2}x = 0 \quad \text{czyli} \quad t^3\ddot{x} + (t^2+t)\dot{x} - x = 0.$$

Diagram Newtona dla tego równania zawiera punkty $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(2,1)$, a wielokąt Newtona jest ograniczony bokami $(-\infty,0) - (1,0) - (2,1) - (2,\infty)$. Zatem współczynnik Katza jest równy nachyleniu boku $(1,0) - (2,1)$ do poziomu i wynosi $\kappa = 1$. Oznacza to, że rozwiązanie formalne jest rzędu Gevreya 1. (Oczywiście widać to również bezpośrednio z postaci $\widehat{x}_1(t)$.)

Spróbujemy teraz zastosować do $\widehat{x}_1(t) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! t^{n+1}$ metodę sumowalności Borela.

$$\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_1(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n! t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n s^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^s t^n\,dt = \int_0^s \sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^n\,dt = \int_0^s \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+s).$$

Zauważmy, że transformata Borela przedłuża się na zbiór $\mathbb{C} \setminus (-\infty,-1]$ i jest wzrostu co najwyżej eksponencjalnego na dowolnym podsektorze S^* w $S(0,2\pi)$. Wobec tego możemy zastosować transformację Laplace'a i dla $\operatorname{Re} t > 0$ dostajemy

$$\mathcal{L}_1\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^\infty \ln(1+s)e^{-s/t}\,ds = -\ln(1+s)e^{-s/t}\Big|_{s=0}^{s=\infty} + \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{t}{1+s}e^{-s/t}\,ds = \int_0^\infty \frac{e^{-s/t}}{1+s}\,ds = x_1(t).$$

Półprostą $[0,\infty)$ po której całkujemy w (11.3) możemy zastąpić dowolną inną półprostą $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$, gdzie $\theta \in (-\pi,\pi)$. Wówczas dostajemy funkcję

$$x_1^\theta(t) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \frac{e^{-s/t}}{1+s}\,ds,$$

która jest przedłużeniem analitycznym $x_1(t)$ na sektor $S(\theta,\pi)$. Zatem $x_1(t)$ możemy przedłużyć analitycznie na zbiór $S(0,3\pi) = \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon \arg t \in (-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)\}$.

11.3 Zjawisko Stokesa

Rozwiązanie formalne równania (11.1) w otoczeniu punktu osobliwego nieregularnego t_0 jest dane przez szereg rozbieżny. Oznacza to, że szereg ten nie może być rozwinięciem asymptotycznym jednej funkcji w całym swym otoczeniu (bo wtedy dałoby się tę funkcję przedłużyć na punkt t_0 i szereg byłby zbieżny). Innymi słowy rozwiązanie formalne równania (11.1) w otoczeniu punktu osobliwego nieregularnego ma w różnych sektorach różne asymptotyki — czyli jest ono rozwinięciem asymptotycznym różnych funkcji, w zależności od wybranego sektora. Fakt ten nosi nazwę *zjawiska Stokesa*, gdyż był po raz pierwszy zaobserwowany przez George'a Stokesa (1819–1903) w 1857 roku.

Wróćmy do prawdziwego rozwiązania $x_1(t)$ (danego przez (11.3)) równania (11.2), które jest analityczne dla $\arg t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Możemy w całce w (11.3) zmienić kontur całkowania na $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$, gdzie $\theta \in (-\pi,\pi)$ i przedłużyć $x_1(t)$ aż do:

$$x_1^{\pi-\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(\pi-\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\,d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (\frac{\pi}{2}-\epsilon, \frac{3\pi}{2}-\epsilon)$$

oraz

$$x_1^{-\pi+\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(-\pi+\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\,d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (-\frac{3\pi}{2}+\epsilon, \frac{1\pi}{2}+\epsilon)$$

Przez linię $\arg t = \pi$ (czyli też $\arg t = -\pi$) nie da się przeprowadzić konturu całkowania, gdyż dla $\xi = -1$ jest biegun. Spróbujmy zatem zbadać na ile zmieni się funkcja jeśli weźmiemy kontury całkowania po obu stronach tej lini. Mamy dla $\arg t \in (\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{3\pi}{2} - \epsilon)$

$$x_1^{\pi+\epsilon}(t) - x_1^{\pi-\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(\pi+\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\,d\xi - \int_0^{e^{i(\pi-\epsilon)}\infty} \frac{e^{-t/\xi}}{1+\xi}\,d\xi = 2\pi i \mathrm{Res}_{\xi=1}\Big(\frac{e^{-\xi/t}}{1+\xi}\Big) = 2\pi i e^{1/t}.$$

Zauważmy, że dla takich t zachodzi $2\pi i e^{1/t} \sim 0$, więc też $x_1^{\pi+\epsilon}(t) \sim \widehat{x}_1(t)$ oraz $x_1^{\pi-\epsilon}(t) \sim \widehat{x}_1(t)$.

Aby móc dalej badać obie asymptotyki wprowadźmy następujące pojęcia

Definicja 11.3 Załóżmy, że $f(t) \sim \widehat{x}(t)$, $g(t) \sim \widehat{x}(t)$ oraz $f(t) = g(t) + r(t)$ dla $t \in S$, gdzie S — sektor. Mówimy, że zbiór $S_\varphi = \{t \in \mathbb{C}\colon \arg t = \varphi\}$ jest *linią Stokesa* jeśli dla $t \in S_\varphi$ funkcja $r(t)$ jest minimalna.

Mówimy, że zbiór $S_\psi = \{t \in \mathbb{C}\colon \arg t = \psi\}$ jest *linią Anty-Stokesa* jeśli dla $t \in S_\psi$ funkcja $r(t)$ majoryzuje $f(t)$ lub $g(t)$.

Zauważmy, że w naszym przypadku linią Stokesa jest S_π natomiast linią Anty-Stokesa jest $S_{\frac{\pi}{2}}$ i $S_{\frac{3\pi}{2}}$.

Więcej o zjawisku Stokesa można znaleźć w książkach W. Balsera [2], E. Hille'a [3] i W. Wasowa [8].

11.4 2-sumowalność

Rozważmy teraz równanie Eulera bis

$$\frac{t^3}{2}\dot{x} + x = t^2, \tag{11.4}$$

którego rozwiązanie formalne wynosi $\widehat{x}_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! t^{2(n+1)} = \widehat{x}_1(t^2)$, zaś prawdziwe rozwiązanie ma postać

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{2e^{1/t^2}e^{-1/s^2}}{s}\,ds = \int_0^\infty \frac{1}{\xi+1}e^{-\xi/t^2}\,d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}).$$

Mamy

$$\Big|x_2(t) - \sum_{n=0}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}(-1)^n n! t^{2n}\Big| \leqslant C_1 B_1^N \lfloor\frac{N+1}{2}\rfloor! |t|^{N+1} \leqslant C B^N \sqrt{N!}|t|^{N+1},$$

czyli $x_2(t) \sim_2 \widehat{x}_2(t)$.

Podobnie jak poprzednio wyliczymy diagram i wielokąt Newtona. W tym celu podzielmy obie strony równania (11.4) przez t^2 i zróżniczkujmy obie strony po t. Dostaniemy równanie jednorodne drugiego rzędu postaci

$$\frac{t}{2}\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{1}{t^2}\dot{x} - \frac{2}{t^3}x = 0, \quad \text{czyli} \quad t^4\ddot{x} + (t^3 + 2t)\dot{x} - 4x = 0.$$

Diagram Newtona zawiera punkty: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ i $(2,2)$. Natomiast wielokąt Newtona składa się z boków: $(-\infty,0) - (1,0) - (2,2) - (2,\infty)$. Można stąd wyczytać, że istnieje jedno rozwiązanie formalne (odcinek poziomy od $(0,0)$ długości 1), które jest rzędu Gevreya $\frac{1}{2}$ (współczynnik Katza $\kappa = 2$).

Dokonajmy teraz procedury 2-sumowalności Borela. Ponieważ $\widehat{x}_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! t^{2(n+1)}$, to

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}_2\widehat{x}_2(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n! s^{2(n+1)}}{\Gamma(1+\frac{2(n+1)}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}s^{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}s^{2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2\int_0^s t^{2n+1}\,dt\\ &= \int_0^s \frac{2s}{1+s^2}\,ds = \ln(1+s^2).\end{aligned}$$

Transformata Borela przedłuża się na $\mathbb{C}\setminus\Big([-i,\infty)\cup[i,\infty)\Big)$ i jest wzrostu co najwyżej eksponencjalnego na dowolnym podsektorze S^* sektora $S(0,\frac{\pi}{2})$. Wobec tego dla $\arg t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ możemy zastosować transformację Laplace'a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2\widehat{\mathcal{B}}_2\widehat{x}_2(t) &= \frac{1}{t^2}\int_0^\infty \ln(1+s^2)e^{-s/t^2}2s\,ds = -\ln(1+s^2)e^{-s^2/t^2}\Big|_{s=0}^{s=\infty} + \int_0^\infty \frac{2s}{1+s^2}e^{-s^2/t^2}\,ds = \int_0^\infty \frac{1}{1+\xi}e^{-\xi/t^2}\,d\xi\\ &= x_2(t).\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku $x_1(t)$, również $x_2(t)$ możemy przedłużyć biorąc odpowiedni kontur całkowania aż do

$$x_2^{\pi-\epsilon}(t) = \int_0^{e^{i(\pi-\epsilon)}\infty} \frac{1}{\xi+1} e^{-\xi/t^2}\, d\xi \quad \text{dla} \quad \arg t \in (\frac{1}{4}\pi - \epsilon, \frac{3}{4}\pi - \epsilon) \cup (\frac{5}{4}\pi - \epsilon, \frac{7}{4}\pi - \epsilon).$$

Porównując to z $x_2^{\pi+\epsilon}(t)$, dla $\arg t \in (\frac{1}{4}\pi + \epsilon, \frac{3}{4}\pi - \epsilon) \cup (\frac{5}{4}\pi + \epsilon, \frac{7}{4}\pi - \epsilon)$ dostajemy

$$x_2^{\pi+\epsilon}(t) - x_2^{\pi-\epsilon}(t) = 2\pi i \mathrm{Res}_{\xi=-1}\Big(\frac{e^{-\xi/t^2}}{1+\xi}\Big) = 2\pi i e^{1/t^2}.$$

Wobec tego dla powyższych t mamy $2\pi i e^{1/t^2} \sim 0$, $x_2^{\pi-\epsilon}(t) \sim x_2(t)$ oraz $x_2^{\pi+\epsilon}(t) \sim x_2(t)$. W tym przypadku liniami Stokesa są $S_{\frac{\pi}{2}}$ i $S_{\frac{3}{2}\pi}$, zaś liniami Anty-Stokesa są $S_{\frac{\pi}{4}}$ i $S_{\frac{3}{4}\pi}$, $S_{\frac{5}{4}\pi}$ i $S_{\frac{7}{4}\pi}$.

11.5 Porównanie 1- i 2-sumowalności. $(2,1)$-multisumowalność

Przy ustalonym kierunku d 1-sumowalność ozancza słabszy warunek ($x_1 \sim_1 \widehat{x}_1$) na sektorze o rozwartości $> \pi$, natomiast 2-sumowalność wymaga spełnienia silniejszego warunku ($x_2 \sim_2 \widehat{x}_2$) lecz tylko na sektorze o rozwartości $> \frac{\pi}{2}$.

Oczywiście $\widehat{x}_1(t)$ nie jest 2-sumowalne (bo $\widehat{x}_1 \notin \mathbb{C}[t]_{\frac{1}{2}}$). Pokażemy, że również $\widehat{x}_2(t)$ nie jest 1-sumowalne. W tym celu weźmy t czysto urojone, tzn $t = is$, $s \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$|\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_2(is)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+2)!}(-1)^{n+1}s^{2n+2}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+2)!}(s^2)^{n+1} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\frac{s^2}{4})^{n+1} = e^{\frac{s^2}{4}} - 1,$$

czyli transformata Borela $\widehat{\mathcal{B}}_1\widehat{x}_2(is)$ ma wzrost eksponencjalny rzędu 2. Zatem nie możemy w nim stosować transformacji Laplace'a w sektorze zawierającym oś urojoną.

Na zakończenie podamy przykład równania, w którym musimy skorzystać z multisumowalności. Równanie

$$t^5(2-t)\ddot{x} + t^2(4+5t^2-2t^3)\dot{x} + 2(2-t+t^2)x = 4t + 2t^2 + 10t^3 - 3t^4 \tag{11.5}$$

posiada rozwiązanie formalne $\widehat{x}(t) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t)$. Spełnia ono również równanie jednorodne wyższego rzędu

$$(8t^6 + \dots + 3t^{10})\dddot{x} + (-16t^3 + \dots)\ddot{x} + (16t + \dots)x = 0,$$

więc jego diagram Newtona zawiera pary $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ i $(3,3)$ i wielokąt Newtona składa się z boków $(-\infty,0) - (1,0) - (2,1) - (3,3) - (3,\infty)$.

Bok o nachyleniu 0 oznacza, że istnieje rozwiązanie formalne $\widehat{x}(t)$. Natomiast boki o nachyleniach 1 i 2 oznaczają, że $\widehat{x}(t)$ jest Gevreya rzędu 1 oraz jest (2,1)-multisumowalne.

Ponieważ $\widehat{x}(t) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t)$ oraz $\widehat{x}_2(t)$ nie jest 1-sumowalny, a $\widehat{x}_1(t)$ nie jest 2-sumowalny, więc $\widehat{x}(t)$ nie jest ani 1-, ani 2-sumowalny. Natomiast jest on (2,1)-multisumowalny.

Ćwiczenia

1. Znajdź diagram i wielokąt Newtona dla danych równań. Ile wynosi niezmiennik Katza? Jakiego rzędu Gevreya są rozwiązania formalne?
   a) $t^5\dddot{x} + t^5\ddot{x} + (t^4+2t)\dot{x} + 7x = 0$.
   b) $t^6(t-1)\dddot{x} + (t^7+5t^3)\ddot{x} + t\dot{x} + (17+4t^3)x = 0$.
   c) $(t^3+t^2+t)^6\ddot{x} + t^4\ddot{x} + (t^2-t)\dot{x} + (43t^4+2t^2+5t+6)x = 0$.

2. Opisz zjawisko Stokesa i znajdź linie Stokesa i Anty-Stokesa dla szeregów:
   a) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)!t^n$,
   b) $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n)!t^{2n+1}$.

12 Teoria perturbacji dla równań różniczkowych

Rozdział ten jest oparty na następujących monografiach poświęconych teorii perturbacji: M. Holmes [4] i R. O'Malley [6]. Wszystkich chcących poszerzyć swoją wiedzę poświęconą tej teorii odsyłam do tych pozycji.

W wielu zagadnieniach fizyki i chemii mamy do czynienia z równaniami w których występuje bliski zeru parametr (będziemy go oznaczać ϵ), który powoduje zaburzenia. Naszym celem będzie zbadanie zależności rozwiązań od tego parametru. Zazwyczaj takiego równania z małym parametrem ϵ nie da się rozwiązać dokładnie, ale możemy to rozwiązanie aproksymować. Dostajemy wówczas rozwinięcie asymptotyczne rozwiązania względem parametru ϵ.

12.1 Perturbacje regularne

Przypuśćmy, że dla małych ϵ i dla $t \in D \subseteq \mathbb{C}$ mamy zdefiniowane równanie różniczkowe $P_\epsilon(x) = 0$, którego rozwiązaniem jest $x(t) = x_\epsilon(t)$. Jeśli przy $\epsilon \to 0$ rozwiązanie $x_\epsilon(t) \rightrightarrows x_0(t)$ na D, gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem $P_0(x_0) = 0$, to wówczas mamy do czynienia z perturbacjami regularnymi.

Zacznijmy od przykładu. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\ddot{x} + \epsilon\dot{x} + 1 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \tag{12.1}$$

Szukamy rozwiązania w postaci szeregu względem ϵ: $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots = \sum_{n=0}^\infty x_n(t)\epsilon^n$.

Wstawiając ten szereg do równania (12.1) dostajemy

$$\sum_{n=0}^\infty \ddot{x}_n(t)\epsilon^n + \sum_{n=1}^\infty \dot{x}_{n-1}(t)\epsilon^n + 1 = 0.$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach ϵ dostajemy równania na $x_n(t)$. W szczególności mamy:

dla $n = 0$ $\quad \ddot{x}_0 + 1 = 0,\ x_0(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1,$ czego rozwiązaniem jest $x_0(t) = -\dfrac{t^2}{2} + t;$

dla $n > 0$ $\quad \ddot{x}_n = -\dot{x}_{n-1},\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,$ czego rozwiązaniem jest $x_n(t) = (-1)^n\Big(\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)!}\Big).$

Zatem

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + t + \sum_{n=1}^\infty \epsilon^n\Big(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\Big).$$

Ponieważ ϵ jest bliskie zeru, to zazwyczaj wystarczy nam wiedza o pierwszych wyrazach w rozwinięciu, czyli np. że

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + t + \epsilon\Big(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2}\Big) + O(\epsilon^2).$$

W kolejnym przykładzie rozważmy równanie nieliniowe

$$\dot{x} = \epsilon e^{x^2}, \qquad x(0) = 1. \tag{12.2}$$

Będziemy szukać rozwiązania w postaci $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2)$. Wstawiając do równania (12.2) dostajemy $\dot{x}_0 + \epsilon\dot{x}_1 + O(\epsilon^2) = \epsilon e^{(x_0+\epsilon x_1+O(\epsilon^2))^2}$. Rozwijając w szereg $e^{s^2} = 1 + \frac{s^2}{1!} + \frac{s^4}{2!} + \dots$ dostajemy ostatecznie równanie

$$\dot{x}_0 + \epsilon\dot{x}_1 + O(\epsilon^2) = \epsilon e^{x_0^2} + O(\epsilon^2), \quad x_0 + \epsilon x_1(0) = 1,$$

którego rozwiązaniem są $x_0(t) = 1$ ($\dot{x}_0 = 0$, $x_0(0) = 1$) i $x_1(t) = et$ ($\dot{x}_1 = e^{x_0^2} = e$, $x_1(0) = 0$).

Zatem $x(t) = 1 + \epsilon et + O(\epsilon^2)$.

Ogólnie, niech L, M będą operatorami różniczkowymi i dodatkowo niech L będzie liniowe. Rozważmy wówczas równanie

$$L(x) + \epsilon M(x) = 0 \tag{12.3}$$

z zadanymi warunkami początkowymi lub brzegowymi. Będziemy szukać rozwiązania postaci $x(t;\epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2)$. Wstawiając do równania (11.3) dostajemy $L(x_0) + \epsilon L(x_1) + \epsilon M(x) = 0$, a stąd $L(x_0) = 0$ (wyliczamy $x_0(t)$) i $L(x_1) = -M(x_0)$ (znajdujemy $x_1(t)$).

12.2 Perturbacje osobliwe — metoda dopasowania rozwinięcia asymptotycznego

Pojawiają się one wtedy, gdy granica perturbacji regularnych $x_\epsilon(t) \rightrightarrows x_0(t)$ przy $\epsilon \to 0$ nie istnieje.

Tak jest np. wtedy, gdy w równaniu ϵ jest współczynnikiem przy x z najwyższą pochodną. Wówczas przejście graniczne $\epsilon \to 0$ powoduje, że zmienia się liczba rozwiązań. Dlatego też aby rozwiązać ten problem musimy użyć jednej z innych metod niż w przypadku perturbacji regularnych.

Pierwszą z nich jest *metoda dopasowania rozwinięcia asymptotycznego*. Aby ją zrozumieć zacznijmy od przykładu.

Rozważmy równanie $\epsilon\dot{x} + x = 1$ z warunkiem początkowym $x(0) = a$, gdzie ϵ jest małym dodatnim parametrem. Rozwiązanie bezpośrednie ma postać $x(t,\epsilon) = 1 + (a-1)e^{-t/\epsilon}$. Przechodząc z $\epsilon \to 0$ dostajemy

$$\lim_{\epsilon\to 0} x(t,\epsilon) = \begin{cases} a = x(0) & \text{dla} \quad t = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t > 0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że o ile $a \neq 1$, to w granicy dostajemy funkcję, która przestaje być ciągła. Oznacza to, że nie da się do tego równania zastosować podstawienia, tak jak w przypadku perturbacji regularnych, które by było dobre dla wszystkich t. Dlatego też będziemy osobno poszukiwać rozwinięć asymptotycznych dla t dalekich od zera (*rozwiązania zewnętrzne*) i dla t w pobliżu zera (*rozwiązania wewnętrzne*). Następnie „skleimy" wszystko w jedno rozwinięcie.

Rozwiązania zewnętrznego będziemy szukać tak jak w przypadku perturbacji regularnych, czyli wstawiając $\overline{x}(t,\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x}_n(t)\epsilon^n$ do wyjściowego równania. Dostajemy wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{\overline{x}}_{n-1}\epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x}_n\epsilon^n = 1, \quad \text{a stąd } \overline{x}_0(t) = 1 \text{ i } \quad \overline{x}_n(t) = -\dot{\overline{x}}_{n-1}, \quad \text{czyli } \ \overline{x}_n(t) = 0 \ \text{ dla } \ n \geqslant 1.$$

A zatem rozwiązanie zewnętrzne ma postać $\overline{x}(t,\epsilon) = 1$.

Zajmiemy się teraz znalezieniem rozwiązania wewnętrznego. W tym celu dokonajmy zamiany zmiennych niezależnych $\tau = t/\epsilon$. Szukamy rozwiązania wewnętrznego postaci

$$\widetilde{x}(\tau,\epsilon) = \widetilde{x}(t/\epsilon,\epsilon) = x(t,\epsilon) - \overline{x}(t,\epsilon) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad \widetilde{x}(0,\epsilon) = x(0,\epsilon) - \overline{x}(0,\epsilon) = a - 1.$$

Ponieważ $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{d\tau}$, to $\widetilde{x}(\tau,\epsilon)$ musi spełniać równanie postaci $\dot{\widetilde{x}} + \widetilde{x} = 0$, $\widetilde{x}(0) = a - 1$. Szukamy rozwiązania tego równania — tak jak w przypadku perturbacji regularnych — w postaci $\widetilde{x}(\tau,\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}_n\epsilon^n$. Dostajemy wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{\widetilde{x}}_n\epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}_n\epsilon^n = 0, \quad \text{a stąd } \dot{\widetilde{x}}_0 + \widetilde{x}_0 = 0, \ \ \widetilde{x}_0(0) = a - 1 \ \text{ i } \ \dot{\widetilde{x}}_n + \widetilde{x}_n = 0, \ \ \widetilde{x}_n(0) = 0 \ \text{ dla } \ n \geqslant 1,$$

a stąd otrzymujemy $\widetilde{x}_0(\tau) = (a-1)e^{-\tau}$ i $\widetilde{x}_n(\tau) = 0$ ($n \geqslant 1$). Rozwiązaniem wewnętrznym jest zatem $\widetilde{x}(\tau,\epsilon) = (a-1)e^{-\tau}$.

Ostateczne rozwiązanie otrzymamy sumując rozwiązanie zewnętrzne i wewnętrzne

$$x(t,\epsilon) = \overline{x}(t,\epsilon) + \widetilde{x}(t/\epsilon,\epsilon) = 1 + (a-1)e^{-t/\epsilon},$$

co oczywiście zgadza się z wcześniej uzyskanym bezpośrednim rozwiązaniem tego równania.

Zastosujmy teraz metodę dopasowania rozwinięcia asymptotycznego do ogólnej postaci zagadnienia brzegowego dla równań liniowych drugiego rzędu postaci

$$\epsilon\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t), \quad \text{dla } \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad a(t) > 0, \quad \text{z warunkami brzegowymi } \ x(0), \ x(1). \tag{12.4}$$

Zakładamy tu, że funkcje $a(t)$, $b(t)$ i $f(t)$ są gładkie. Rozwiązania będziemy szukać w postaci $x(t,\epsilon) = \overline{x}(t,\epsilon) + \widetilde{x}(t/\epsilon,\epsilon)$, gdzie $\overline{x}(t,\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x}_n(t)\epsilon^n$ jest rozwiązaniem zewnętrznym, a $\widetilde{x}(\tau,\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}_n(\tau)\epsilon^n$ rozwiązaniem wewnętrznym.

Wstawiając rozwiązanie zewnętrzne do równania dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\overline{x}}_{n-1}\epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} a(t)\dot{\overline{x}}_n\epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} b(t)\overline{x}_n\epsilon^n = f(t), \qquad \overline{x}(1,\epsilon) = x(1).$$

Stąd $\overline{x}_0(t)$ spełnia równanie $a(t)\dot{\overline{x}}_0 + b(t)\overline{x}_0 = f(t)$, $\ \overline{x}_0(1) = x(1)$.

Podobnie $\overline{x}_n(t)$ dla $n \geqslant 1$ spełnia równanie $a(t)\dot{\overline{x}}_n + b(t)\overline{x}_n = -\ddot{\overline{x}}_{n-1},\ \overline{x}_n(1) = 0$. Rozwiązując te równania jesteśmy w stanie sukcesywnie wyliczyć $\overline{x}_0(t), \overline{x}_1(t), \dots, \overline{x}_n(t), \dots$.

Rozwiązanie zewnętrzne zachodzi dla $0 < t \leqslant 1$, czyli nie wiadomo, co będzie się działo w otoczeniu zera. Zauważmy, że przy znajdowaniu rozwiązania zewnętrznego nie wykorzystujemy warunku brzegowego w zerze. Ponieważ $\overline{x}(0,\epsilon)$ nie musi się równać $x(0)$, więc musimy dodać poprawkę $\overline{x} + \widetilde{x}$.

Ponieważ $\overline{x}$ i $\overline{x} + \widetilde{x}$ są rozwiązaniami (12.4), więc dla $\tau = t/\epsilon$ mamy

$$\epsilon \frac{d^2\overline{x}}{dt^2} + a(t)\frac{d\overline{x}}{dt} + b(t)\overline{x} = f(t) = \epsilon\Big(\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{d^2\widetilde{x}}{d\tau^2}\Big) + a(t)\Big(\frac{d\overline{x}}{dt} + \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{d\widetilde{x}}{d\tau}\Big) + b(t)(\overline{x} + \widetilde{x}).$$

Stąd rozwiązanie wewnętrzne $\widetilde{x}$ musi spełniać równanie

$$\ddot{\widetilde{x}} + a(\epsilon\tau)\dot{\widetilde{x}} + \epsilon b(\epsilon\tau)\widetilde{x} = 0, \quad \widetilde{x}(0,\epsilon) = x(0) - \overline{x}(0,\epsilon), \quad \lim_{\tau\to\infty} \widetilde{x}(\tau,\epsilon) = 0.$$

Aby znaleźć to rozwiązanie weźmy $\widetilde{x}(\tau,\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}_n(\tau)\epsilon^n$. Współczynniki tego rozwinięcia $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n, \dots$ można zatem znaleźć rozwiązując kolejno równania (z odpowiednimi warunkami brzegowymi): $\ddot{\widetilde{x}}_0 + a(0)\dot{\widetilde{x}}_0 = 0$ i $\ddot{\widetilde{x}}_n + a(0)\dot{\widetilde{x}}_n = \beta_{n-1}(\tau)$, gdzie $\beta_{n-1}(\tau)$ można sukcesywnie wyznaczać (dla $n \geqslant 1$).

Ostatecznym rozwiązaniem jest $x(t,\epsilon) = \overline{x}(t,\epsilon) + \widetilde{x}(t/\epsilon,\epsilon)$.

12.3 Perturbacje osobliwe — metoda WKB

Nazwa metody pochodzi od jej odkrywców (Wentzel, Kramers, Brillouin), którzy ją stworzyli w 1926 roku na potrzeby mechaniki kwantowej. Można ją stosować jedynie w przypadku, gdy zależność $x(t)$ jest eksponencjalna. Rozwiązania w metodzie tej poszukujemy w postaci

$$x(t) \sim e^{\theta(t)/\epsilon}\Big(x_0(t) + \epsilon_1(t) + \dots\Big). \tag{12.5}$$

Różniczkując to rozwinięcie asymptotyczne dostajemy

$$\dot{x}(t) \sim e^{\theta(t)/\epsilon}\Big(\epsilon^{-1}\dot{\theta}(t)x_0(t) + \dot{x}_0(t) + \dot{\theta}(t)x_1(t) + \epsilon\dot{x}_1(t) + \dots\Big), \tag{12.6}$$

$$\ddot{x}(t) \sim e^{\theta(t)/\epsilon}\Big(\epsilon^{-2}\theta(t)^2x_0(t) + \epsilon^{-1}\big(\ddot{\theta}(t)x_0(t) + 2\dot{\theta}(t)\dot{x}_0(t) + \dot{\theta}(t)^2x_1(t)\big) + \dots\Big). \tag{12.7}$$

Będziemy stosować metodę WKB do równań typu $\epsilon^2\ddot{x} - q(t)x = 0$. Wstawmy zatem do tego równania $x(t)$ w postaci (12.5). Dostaniemy wówczas

$$\dot{\theta}^2x_0 + \epsilon(\ddot{\theta}x_0 + 2\dot{\theta}\dot{x}_0 + \dot{\theta}^2x_1) + \dots - q(t)(x_0 + \epsilon x_1) = 0.$$

Porównując wyrażenia tego samego rzędu dostajemy dla $O(1)$ równanie eikonału $\dot{\theta}^2 = q(t)$, którego rozwiązaniem jest $\theta(t) = \pm\int^t \sqrt{q(s)}\,ds$. Podobnie dla $O(\epsilon)$ dostajemy równanie transportu $\ddot{\theta}x_0 + 2\dot{\theta}\dot{x}_0 + \dot{\theta}^2x_1 = q(t)x_1$, czyli $\ddot{\theta}x_0 + 2\dot{\theta}\dot{x}_0 = 0$ z rozwiązaniem $x_0(t) = \frac{C}{\sqrt{\dot{\theta}}}$. Zatem dostajemy

$$x(t) \sim q(t)^{-1/4}\Big(a_0e^{-1/\epsilon\int^t\sqrt{q(s)}\,ds} + b_0e^{1/\epsilon\int^t\sqrt{q(s)}\,ds}\Big).$$

W szczególności np. dla $q(t) = -e^{2t}$ mamy

$$x(t) \sim e^{-t/2}\Big(a_0e^{-ie^t/\epsilon} + b_0e^{ie^t/\epsilon}\Big) = e^{-t/2}\Big(\alpha_0\cos\big(\frac{e^t}{\epsilon}\big) + \beta_0\sin\big(\frac{e^t}{\epsilon}\big)\Big).$$

Ćwiczenia

1. Znajdź rozwiązania (z resztą $O(\epsilon^2)$) następujących równań:
   a) $\ddot{x} + \epsilon\dot{x} - x = 1$, $x(0) = x(1) = 1$;
   b) $\ddot{x} + x + x^3 = 0$, $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = \epsilon$;
   c) $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$, $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$;
   d) $\dot{x} - x - \epsilon\frac{1}{x} = 0$, $x(0) = 1$.

2. Znajdź rozwiązania (z resztą $O(\epsilon^2)$) metodą dopasowania rozwinięcia asymptotycznego następujących równań:
   a) $\epsilon\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$;
   b) $\epsilon\ddot{x} + \dot{x} - a = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$;
   c) $\epsilon\ddot{x} + 2\dot{x} + x^2 = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$;
   d) $\epsilon\ddot{x} + (1+\epsilon)\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.
3. Znajdź rozwiązania (z resztą $O(\epsilon^2)$) metodą WKB następujących równań:
   a) $\epsilon^2\ddot{x} - (1+t^2)x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 2$;
   b) $\epsilon^2\ddot{x} + 4e^{-2t}x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$.

13 Równania Painlevé

Rozdział ten jest oparty na książkach E. Hille'a [3], K. Iwasaki, ... [5] i preprincie B. Ziemiana [11]. Więcej o równaniach Painlevé, a także o ich związkach z klasycznymi funkcjami specjalnymi można znaleźć we wspomnianej książce K. Iwasaki, ... [5].

W przypadku równań liniowych postaci

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t)$$

rozwiązania mogą mieć osobliwości jedynie tam, gdzie osobliwości mają współczynniki $a_0(t), \ldots, a_{m-1}(t), b(t)$. W szczególności osobliwości nie zależą od danych początkowych.

W przypadku równań nieliniowych sytuacja wygląda zupełnie inaczej. Zazwyczaj osobliwości rozwiązań zależą od danych początkowych i nie można z postaci równania wywnioskować ani gdzie osobliwości rozwiązań się pojawią, ani jakiego są typu. Zilustrujemy ten fakt kilkoma przykładami.

1. Rozwiązaniem równania $\dot{x} = -x^2$ jest $x(t) = \frac{1}{t-c}$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. Zauważmy, że w punkcie $t_0 = c$ rozwiązanie ma osobliwość — biegun pierwszego rzędu.

2. Rozwiązaniem równania $m\dot{x}x^{m-1} = 1$ $(m \in \mathbb{N})$ jest $x(t) = \sqrt[m]{t-c}$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. Zatem dla $t_0 = c$ rozwiązanie ma osobliwość — algebraiczny punkt rozgałęzienia.

3. Rozwiązaniem równania $\ddot{x} + \dot{x}^2 = 0$ jest $x(t) = \ln(t - c_1) + c_2$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. W punkcie $t_0 = c_1$ rozwiązanie ma osobliwość — niealgebraiczny punkt rozgałęzienia.

4. Rozwiązaniem równania $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)\right)^2 + 4\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^3 = 0$ jest $x(t) = c_2 e^{-\frac{1}{t-c_1}}$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. W punkcie $t_0 = c_1$ rozwiązanie ma osobliwość — jest to punkt istotnie osobliwy.

Rozważmy *algebraiczne* równanie różniczkowe

$$x^{(m)} = F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}) = 0 \tag{13.1}$$

tzn. takie, że F jest wielomianem względem $x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}$ o meromorficznych współczynnikach.

Definicja 13.1 Mówimy, że równanie różniczkowe (13.1) jest *bez ruchomych punktów rozgałęzienia* (odpowiednio *bez ruchomych punktów istotnie osobliwych*) jeśli rozwiązania (13.1) nie mają punktów rozgałęzienia (odpowiednio punktów istotnie osobliwych), które zmieniają swoją pozycję przy zmianie danych początkowych.

Definicja 13.2 Mówimy, że równanie różniczkowe algebraiczne (13.1) ma *własność Painlevé* jeśli jest bez ruchomych punktów rozgałęzienia i bez ruchomych punktów istotnie osobliwych.

Problem: Znaleźć wszystkie algebraiczne równania różniczkowe mające własność Painlevé .

Dla $m = 1$ L. Fuchs i H. Poincaré wykazali, że każde równanie różniczkowe algebraiczne mające własność Painlevé da się przez odowiednią transformację (zamianę zmiennych) sprowadzić do równania Riccatiego $\dot{x} = a(t)x^2+b(t)x+c(t)$, gdzie $a(t), b(t), c(t)$ są analityczne. Jeśli dopuścimy równania, w których $x^{(m)}$ występuje w potędze wyższej niż jeden, to dostajemy również równania mające własność Painlevé, któe dadzą się sprowadzić do równania Wierstrassa $\dot{x}^2 = 4x^3 - ax - b$, gdzie $(a, b \in \mathbb{C})$ (jego rozwiązaniem jest funkcja eliptyczna Weierstrassa).

Sytuacja się komplikuje, gdy rozważamy równania rzędu $m \geqslant 2$. W rozwiązaniach algebraicznych równań różniczkowych rzędu 1 pojawiają się jedynie ruchome punkty rozgałęzienia, a w równaniach rzędu $m \geqslant 2$ pojawiają się również ruchome punkty istotnie osobliwe.

Dla $m = 2$ powyższy problem postawił w 1887 roku E. Picard, a rozwiązanie znalazł na przełomie XIX i XX wieku Paul Painlevé (1863–1933). Znalazł on 50 możliwych typów równań, które spełniają tę własność. Większość z tych typów równań (44) sprowadza się do równań całkowalnych przez kwadratury, równań liniowych lub równań prowadzących do funkcji eliptycznych. Oprócz tego problem rozwiązuje 6 typów równań, których rozwiązania nie da się wyrazić za pomocą znanych funkcji.

Sześć typów równań, które obecnie noszą nazwę *równań Painlevé*, to:

$\mathrm{P_I}$ $\quad \ddot{x} = 6x^2 + t$

$\mathrm{P_{II}}$ $\quad \ddot{x} = 2x^3 + tx + a$

$\mathrm{P_{III}}$ $\quad \ddot{x} = \frac{1}{x}(\dot{x})^2 - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{ax^2+b}{t} + cx^3 + \frac{d}{x}$

$\mathrm{P_{IV}}$ $\quad \ddot{x} = \frac{1}{x}(\dot{x})^2 + \frac{3}{2}x^3 + 4tx^2 + 2(t^2-a)x + \frac{b}{x}$

$\mathrm{P_V}$ $\quad \ddot{x} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}\right)(\dot{x})^2 - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{(x-1)^2}{t^2}\left(ax + \frac{b}{x}\right) + \frac{cx}{t} + \frac{dx(x+1)}{x-1}$

$\mathrm{P_{VI}}$ $\quad \ddot{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right)(\dot{x})^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right)\dot{x} + \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left(a - \frac{bt}{x^2} + c\frac{t-1}{(x-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - d\right)\frac{t(t+1)}{(x-t)^2}\right).$

Postać równań $\mathrm{P_I}$ – $\mathrm{P_{III}}$ znalazł Painlevé, równań $\mathrm{P_{IV}}$ – $\mathrm{P_V}$ jego uczeń B. Gambier, a najbardziej ogólne równanie $\mathrm{P_{VI}}$ znalazł R. Fuchs (syn Lazarusa Fuchsa). Rozwiązania tych równań tworzą całkiem nową klasę funkcji, które pojawiają się np. przy rozwiązywaniu nieliniowych równań cząstkowych całkowicie całkowalnych. Obecnie rozwiązania równań Painlevé uważa się — podobnie jak funkcje hipergeometryczne, Bessela, Legendre'a, Kummera, itd — za funkcje specjalne.

Dla równań rzędu $m \geqslant 3$ problem znalezienia i klasyfikacji wszystkich równań mających własność Painlevé jest wciąż nierozwiązany.

Postaramy się teraz przyjrzeć rozwiązaniu równania Painlevé $\mathrm{P_I}$: $\ddot{x} = 6x^2 + t$. Będziemy szukać rozwiązania w postaci szeregu Laurenta $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^{\alpha_n}$, gdzie α_n jest rosnącym ciągiem liczb całkowitych i $\alpha_0 < 0$, $a_n \neq 0$. Wstawiając do równania $\mathrm{P_I}$ dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\alpha_n - 1)a_n(t-t_0)^{\alpha_n - 2} = 6\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^{\alpha_n}\Big)^2 + t_0 + (t - t_0).$$

Porównując składniki najniższego rzędu (dla $n = 0$) dostajemy $\alpha_0(\alpha_0 - 1)a_0(t-t_0)^{\alpha_0-2} = 6a_0^2(t-t_0)^{2\alpha_0}$. Stąd mamy, że $\alpha_0 - 2 = 2\alpha_0$ (czyli $\alpha_0 = -2$) i $6a_0 = 6a_0^2$ (czyli $a_0 = 1$.)

Kolejne składniki (dla $n = 1$) dają równanie $\alpha_1(\alpha_1 - 1)a_1(t-t_0)^{\alpha_1-2} = 12a_1(t-t_0)^{\alpha_1-2} + t_0$. Jeśli $t_0 \neq 0$ składniki po prawej stronie są tego samego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = 2$. Dostajemy wtedy również, że $2a_1 = 12a_1 + t_0$, a stąd $a_1 = -\frac{1}{10}t_0$.

Dla $n = 2$ dostajemy $\alpha_2(\alpha_2 - 1)a_2(t-t_0)^{\alpha_2-2} = 12a_2(t-t_0)^{\alpha_2-2} + (t-t_0)$. Rozwiązaniem jest $\alpha_2 = 3$ i $a_2 = -\frac{1}{6}$.

Dla $n = 3$ mamy równanie $\alpha_3(\alpha_3 - 1)a_3(t-t_0)^{\alpha_3-2} = 12a_3(t-t_0)^{\alpha_3-2}$. Rozwiązaniem jest $\alpha_3 = 4$ i $a_3 = h$, gdzie $h \in \mathbb{C}$ jest dowolną liczbą zespoloną.

Postępując tak dalej dostajemy, że wszystkie wykładniki α_n są całkowite i $\alpha_n \geqslant n+1$ dla $n > 0$. W końcu dostajemy

$$x(t) = (t-t_0)^{-2} - \frac{1}{10}t_0(t-t_0)^2 - \frac{1}{6}(t-t_0)^3 + h(t-t_0)^4 + \frac{1}{300}t_0^2(t-t_0)^6 + \frac{1}{150}t_0(t-t_0)^7 + \dots \tag{13.2}$$

Pokażemy, że szereg ten jest zbieżny. W tym celu wybierzmy liczbę $M > 1$ taką, że $|t_0| < 10M$, $|h| < M^3$. Wówczas również $|a_n| < M^n$ dla $0 \leqslant n \leqslant 5$. Dalsze współczynniki a_n szacujemy korzystając z zależności rekurencyjnej

$$\big(\alpha_n(\alpha_n - 1) - 12\big)a_n = 6\sum_{j,k} a_j a_k, \tag{13.3}$$

gdzie $j, k \in \mathbb{N}$, $j, k < n$, $j + k \leqslant n$ są takie, że $\alpha_j + \alpha_k = \alpha_n - 2$. Równość (13.3) wynika z porównania składników rzędu n:

$$\alpha_n(\alpha_n - 1)a_n(t-t_0)^{\alpha_n-2} = 12a_n(t-t_0)^{\alpha_n-2} + 6\sum_{j,k} a_j a_k(t-t_0)^{\alpha_n-2},$$

gdzie j, k takie, że $\alpha_j + \alpha_k = \alpha_n - 2$, $\alpha_j \geqslant 2$, $\alpha_k \geqslant 2$.

Suma z prawej strony (13.3) zawiera co najwyżej $n-1$ składników (bo $1 \leqslant j \leqslant n-1$ i dla ustalonego j znajdziemy tylko jedno k takie, że $\alpha_j + \alpha_k = \alpha_n - 2$). Zauważmy również, że z faktu $\alpha_n \geqslant n+1$ wynika oszacowanie $\alpha_n(\alpha_n - 1) - 12 \geqslant (n+4)(n-3)$. Wobec tego, korzystając z (13.3) możemy indukcyjnie szacować współczynniki a_n dla $n \geqslant 6$:

$$|a_n| \leqslant \frac{6(n-1)M^n}{(n+4)(n-3)} \leqslant M^n.$$

Zatem szereg (13.2) jest zbieżny dla $0 < |t - t_0| < M^{-1}$ i jest w tym nakłutym dysku rozwiązaniem równania Painlevé. Wykazaliśmy więc, że rozwiązanie $\mathrm{P_I}$ jest funkcją meromorficzną z podwójnym biegunem.

Równania Painlevé dopuszczają osobliwości (poza biegunami) jedynie w następujących punktach: $\mathrm{P_I}$ — ∞, $\mathrm{P_{II}}$ — ∞, $\mathrm{P_{III}}$ — $0, \infty$, $\mathrm{P_{IV}}$ — ∞, $\mathrm{P_V}$ — $0, \infty$, $\mathrm{P_{VI}}$ — $0, 1, \infty$.

Równania $\mathrm{P_I}$ — $\mathrm{P_V}$ można uzyskać z $\mathrm{P_{VI}}$ za pomocą pewnego procesu granicznego. Przed sformułowaniem tego wyniku wprowadźmy jeszcze jedno pomocnicze równanie Painlevé (powstałe z $\mathrm{P_{III}}$ poprzez zamianę zmiennych):

$\mathrm{P_{III'}}$ $\quad \ddot{x} = \frac{1}{x}\dot{x}^2 - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{x^2}{4t^2}(cx + a) + \frac{b}{4t} + \frac{d}{4x}$.

Stwierdzenie 13.3 *Równania* $\mathrm{P_I}$ — $\mathrm{P_V}$ *są uzyskane z* $\mathrm{P_{VI}}$ *poprzez następujące podstawienia i przejścia graniczne:*

1. $P_{VI} \to P_V$: $\quad t \mapsto 1 + \epsilon t$, $b \mapsto -b$, $c \mapsto d\epsilon^{-2} + c\epsilon^{-1}$, $d \mapsto -d\epsilon^{-2}$ $(\epsilon \to 0)$.
2. $P_V \to P_{IV}$: $\quad t \mapsto 1 + \sqrt{2}\epsilon t$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon x$, $a \mapsto \frac{1}{2}\epsilon^{-4}$, $b \mapsto \frac{1}{4}b$, $c \mapsto -\epsilon^{-4}$, $d \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-4} + a\epsilon^{-2}$ $(\epsilon \to 0)$.
3. $P_{IV} \to P_{II}$: $\quad t \mapsto -\epsilon^{-3}(1 - 2^{-2/3}\epsilon^4 t)$, $x \mapsto \epsilon^{-3}(1 + 2^{2/3}\epsilon^2 x)$, $a \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-6} - 2a$, $b \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-12}$ $(\epsilon \to 0)$.
4. $P_V \to P_{III'}$: $\quad t \mapsto t$, $x \mapsto 1 + \epsilon x$, $a \mapsto \frac{1}{8}\epsilon^{-2}c + \frac{1}{4}\epsilon^{-1}a$, $b \mapsto -\frac{1}{8}\epsilon^{-2}c$, $c \mapsto \frac{1}{4}\epsilon b$, $d \mapsto \frac{1}{8}\epsilon^2 d$ $(\epsilon \to 0)$.
5. $P_{III'} \to P_{III}$: $\quad t \mapsto t^2$, $x \mapsto tx$.
6. $P_{III} \to P_{II}$: $\quad t \mapsto 1 + \epsilon^2 t$, $x \mapsto 1 + 2\epsilon x$, $a \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-6}$, $b \mapsto \frac{1}{2}\epsilon^{-6}(1 + 4a\epsilon^3)$, $c \mapsto \frac{1}{4}\epsilon^{-6}$, $d \mapsto -\frac{1}{4}\epsilon^{-6}$ $(\epsilon \to 0)$.
7. $P_{II} \to P_I$: $\quad t \mapsto -6\epsilon^{-10}(1 - \frac{1}{6}\epsilon^{12}t)$, $x \mapsto \epsilon^{-5}(1 + \epsilon^6 x)$, $a \mapsto 4\epsilon^{-15}$ $(\epsilon \to 0)$.

Dowód. Obliczenia wynikłe z przedstawionych podstawień prowadzą nas z jednego równania do drugiego. Dla ustalenia uwagi wykażemy przejście $\mathrm{P_{VI}} \to \mathrm{P_V}$ (pozostałe pokazuję się w ten sam sposób).

Niech $t = 1 + \epsilon t_1$, $b = -b_1$, $c = d_1\epsilon^{-2} + c_1\epsilon^{-1}$, $d = -d_1\epsilon^{-2}$. Wówczas równanie $\mathrm{P_{VI}}$: $\frac{d^2x}{dt^2} = R\big(t, x, \frac{dx}{dt}\big)$ przechodzi na $\frac{d^2x}{dt_1^2} = \epsilon^2 R\big(1 + \epsilon t_1, x, \epsilon^{-1}\frac{dx}{dt_1}\big)$, gdyż $\frac{dx}{dt_1} = \epsilon\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt_1^2} = \epsilon^2\frac{d^2x}{dt^2}$.

Biorąc $\epsilon \to 0$ dostajemy równanie $\mathrm{P_V}$ względem zmiennych t_1, x. □

Ze Stwierdzenia 13.3 wynika, że najbardziej ogólną formą równania Painlevé jest $\mathrm{P_{VI}}$, gdyż z niego da się otrzymać wszystkie inne równania. Okazuje się, że szóste równanie Painlevé ma również inne ciekawe własności.

Stwierdzenie 13.4 *Szóste równanie Painlevé* $\mathrm{P_{VI}}$ *ma grupę symetrii, która jest generowana przez następujące transformacje:*

1. $T_1\colon x \mapsto 1 - x$, $t \mapsto 1 - t$ $\quad l_1\colon (a, b, c, d) \mapsto (a, c, b, d)$.
2. $T_2\colon x \mapsto \frac{1}{x}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ $\quad l_2\colon (a, b, c, d) \mapsto (b, a, c, d)$.
3. $T_3\colon x \mapsto \frac{x-t}{1-t}$, $t \mapsto \frac{t}{t-1}$ $\quad l_3\colon (a, b, c, d) \mapsto (a, d, c, b)$.

Dowód. Wynika z bezpośrednich wyliczeń. Dokonując przedstawionych zamian zmiennych (podobnie jak w dowodzie Stwierdzenia 13.3) dostajemy te same równanie $\mathrm{P_{VI}}$, gdy zamiast (a, b, c, d) weźmiemy $l_i(a, b, c, d)$ $(i = 1, 2, 3)$. □

Ćwiczenia

1. Wykaż, że $\alpha_4 = 6$, $a_4 = \frac{1}{300}t_0^2$ oraz $\alpha_5 = 7$ i $a_5 = \frac{1}{150}t_0$ w rozwinięciu w szereg Laurenta rozwiązania $\mathrm{P_I}$.
2. Wykaż, że rozwiązanie $\mathrm{P_I}$ może mieć zero rzędu 3 w $t = t_0$ wtedy i tylko wtedy gdy $t_0 = 0$.
3. Znajdź pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg Laurenta rozwiązań równań:
   a) $\ddot{x} = 2x^3 + t$,
   b) $\ddot{x} = 3x^2 + t$.
4. Uzupełnij dowody Stwierdzeń 13.3 i 13.4.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej.* Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej.* Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.