Model dopasowywania się cen

na rynku

autor: Milena Ścisłowska

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego, wydział Matematyczno – Przyrodniczy

Warszawa 2013

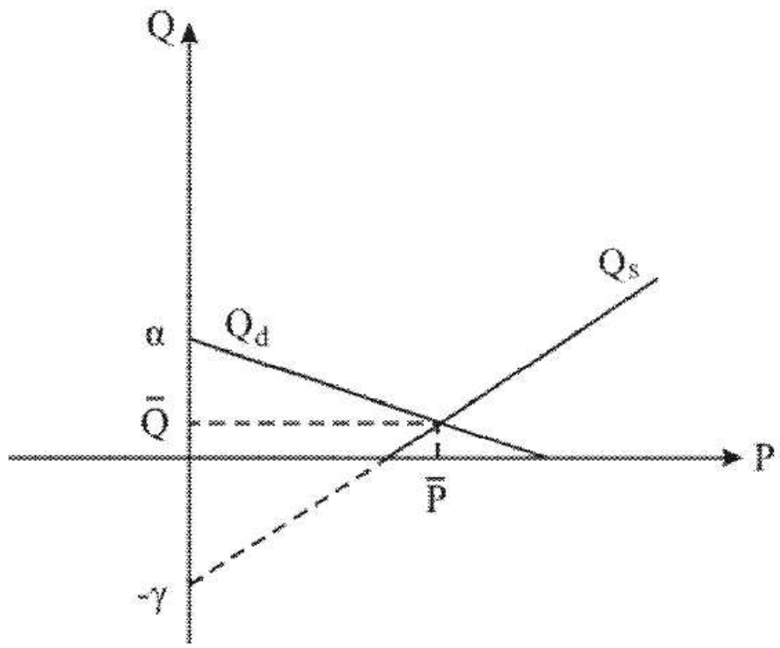
- **Prosty model rynku**
  - kupujący i sprzedający na rynku kierują się aktualną ceną dobra
- **Model rynku z określoną tendencją zmiany cen**
  - kupujący i sprzedający na rynku kierują się aktualną ceną dobra oraz zmianą ceny w czasie

PROSTY MODEL RYNKU

Wzory ogólne dla popytu i podaży:

Popyt: $Q_d(p) = \ \alpha - \beta p$

Podaż: $Q_s(p) = \ -\gamma + \delta p$



Rys.1. Prosty model rynku.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

Q_d - (Quantity Demand) - wielkość popytu na dane dobro

Q_s - (Quantity Supply) - wielkość podaży dobra

p – cena dobra

α i β – wskazują na punkty przecięcia funkcji popytu i podaży z osią pionową

-γ i δ – są równe tangensowi kątów nachylenia funkcji

Wyprowadzamy cenę równowagi $\bar{p}$, przy której podaż równoważy popyt. Punkt $\bar{p}$ jest punktem przecięcia funkcji podaży i funkcji popytu:

$$Q_d(p) = Q_s(p)$$

$$\alpha - \beta\bar{p} = -\gamma + \delta\bar{p}$$

cena równowagi: $\bar{p} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Przypuśćmy, że w chwili t=0 rynek nie jest w stanie równowagi i cena wynosi p(0)≠ $\bar{p}$

Zbadamy sposób, w jaki cena będzie zmieniać się w czasie w odpowiedzi na nierównowagę między podażą a popytem.
Przyjmujemy, że zmiany ceny przybierają ten sam kierunek, co nadwyżka popytu oraz że są do niej proporcjonalne.

Wtedy:

$$\frac{dp}{dt} = \Theta[Q_d(p) - Q_s(p)]$$

Θ – dodatni współczynnik proporcjonalności

Podstawiamy Q_d i Q_s i otrzymujemy:

$$\frac{dp}{dt} = \Theta(\alpha - \beta p + \gamma - \delta p)$$

$$\frac{dp}{dt} + \Theta(\beta + \delta)p = \Theta(\alpha + \gamma)$$

równanie liniowe niejednorodne pierwszego rzędu, o stałych współczynnikach

Stosujemy metodę czynnika całkującego, mnożąc obie strony przez $e^{\Theta(\beta+\delta)t}$:

$$e^{\Theta(\beta+\delta)t}\frac{dp}{dt}+\Theta(\beta+\delta)e^{\Theta(\beta+\delta)t}p=\Theta(\alpha+\gamma)e^{\Theta(\beta+\delta)t}$$

Stąd:

$$\frac{d}{dt}(e^{\Theta(\beta+\delta)t}p)=\Theta(\alpha+\gamma)e^{\Theta(\beta+\delta)t}$$

Całkujemy obie strony i otrzymujemy:

$$e^{\Theta(\beta+\delta)t}p=\Theta(\alpha+\gamma)\frac{e^{\Theta(\beta+\delta)t}}{\Theta(\beta+\delta)}+c$$

c – stała, którą obliczamy biorąc t=0

$$e^{0}p(0)=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+c\equiv\bar{p}+c$$

Zatem $c=p(0)-\bar{p}$ i wobec tego: $p(t)=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}+ce^{-\Theta(\beta+\delta)t}$

Co możemy zapisać: $p(t)=\bar{p}+[p(0)-\bar{p}]e^{-\Theta(\beta+\delta)t}$

$\Theta,\beta,\delta>0$, zatem $p(t)\to\bar{p}$ przy $t\to\infty$.

W celu opisania faktu, że odchylenie ceny od $\bar{p}$ do $p(0)$ prowadzi do cen $p(t)$, które przy t dążącym do nieskończoności zbiegają do $\bar{p}$, mówimy, że cena równowagi jest *asymptotycznie stabilna.*

Wniosek stwierdzający, że równowaga rynkowa jest zjawiskiem stabilnym lub nawet asymptotycznie stabilnym jest dość odległy od realiów gospodarczych. Jest to sytuacja ekonomiczna najbardziej pożądana w gospodarce każdego kraju, ale trudna do zrealizowania w realnych warunkach ekonomicznych.

Ekonomiczna interpretacja:

W bardzo długim czasie, na rynku zachowującym się zgodnie z założeniami naszego modelu liniowego, ceny towarów powinny przybliżać się do ceny równowagi rynkowej

MODEL RYNKU Z OKREŚLONĄ TENDENCJĄ ZMIANY CEN

Rozważmy rynek, na którym występuje jeden towar o cenie $p = p(t)$, zmiennej w zależności od czasu.

Funkcje popytu i podaży w chwili t:

$$Q_d = \alpha - \beta p + m\frac{dp}{dt} + n\frac{d^2p}{dt^2}$$

$$Q_s = -\gamma + \delta p + u\frac{dp}{dt} + v\frac{d^2p}{dt^2}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, m, n, u, v > 0$

$\frac{dp}{dt}$ – *inflacja*

$\frac{d^2p}{dt^2}$ – *prędkość zmiany inflacji w czasie*

Parametry m, n, u, v *są współczynnikami określającymi poziom reakcji kupujących i sprzedających na inflację i prędkość zmiany inflacji.*

Załóżmy, że rynek jest w stanie równowagi, czyli $Q_d(p) = Q_s(p)$, zatem:

$$\alpha - \beta p + m\frac{dp}{dt} + n\frac{d^2p}{dt^2} = -\gamma + \delta p + u\frac{dp}{dt} + v\frac{d^2p}{dt^2}$$

czyli:

$$(n - v)\frac{d^2p}{dt^2} + (m - u)\frac{dp}{dt} - (\beta + \delta)p = -(\alpha + \gamma)$$

równanie liniowe niejednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach

oznaczmy:

$(n - v) = a_0$

$(m - u) = a_1$

$-(\beta + \delta) = a_2$

$$a_0\frac{d^2p}{dt^2} + a_1\frac{dp}{dt} + a_2 p = -(\alpha + \gamma)$$

$$a_0 \frac{d^2p}{dt^2} + a_1 \frac{dp}{dt} + a_2 p = -(\alpha + \gamma)$$

Szukamy rozwiązania szczególnego.

$p(t) = \bar{p}$

$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = 0$

Zatem mamy: $0 + a_2\bar{p} = -(\alpha + \gamma)$

Ponieważ $a_2 = -(\beta + \delta)$ otrzymujemy:

$$\bar{p} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Czyli ponownie cena w stanie równowagi statycznej.

Ścieżka ceny jest więc w ogólności dana wzorem:

$$p(t) = \bar{p} + P(t)$$

Gdzie $P(t)$ jest funkcją dopełniającą, spełniającą równanie:

$$a_0 \frac{d^2P}{dt^2} + a_1 \frac{dP}{dt} + a_2 P = 0$$

Jeśli $P(t) \to \infty$, to $p(t) \to \bar{p}$ i rynek wykazuje stabilność asymptotyczną.

Jeżeli oba pierwiastki równania pomocniczego są rzeczywiste i ujemne lub są zespolone i ich rzeczywiste części są ujemne, to funkcja zmierza do zera.

Powyższe zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_0 > 0, \qquad a_1 > 0, \qquad a_2 > 0$$

albo

$$a_0 < 0, \qquad a_1 < 0, \qquad a_2 < 0$$

Ponieważ w naszym modelu mamy $a_2 < 0$, bo $a_2 = -(\beta + \delta)$, to asymptotyczną stabilność uzyskamy, gdy $n - v = 0$ oraz $m - u = 0$, czyli $m > u$ oraz $n < v$.

<u>Ekonomiczna interpretacja:</u>

Nabywcy wolą kupić dobra w tej chwili, spodziewając się, że później cena będzie wyższa, przez co zwiększają obecny popyt.

Dziękuję za uwagę.