ROZKŁAD LICZB NA SUMĘ DWÓCH LUB CZTERECH LICZB TRÓJKĄTNYCH

Magdalena Durczyk

WPROWADZENIE

W swojej pracy będę korzystała z książki pt. ,,Quantum Calculus", autorstwa: Victor Kac oraz Pokman Cheung. Opracuję dział 17. Dotyczy on rozkładu liczb na sumę dwóch lub czterech liczb trójkątnych. Przypomnijmy wzór na n-tą liczbę trójkątną:

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ponieważ $\Delta_{-n-1} = \Delta_n$ ciąg $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jest symetryczny oraz możemy ograniczyć definicję liczb trójkątnych dla $n \geq 0$. W tym przypadku liczby trójkątne zdefiniujemy jako szereg potęgowy:

$$\Delta(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n}.$$

Podsumowując, liczba sposobów wyrażenia N jako sumy m liczb trójkątnych, zliczając składniki w kolejności, jest jednakowa ze współczynnikiem wyrazu q^n w rozwinięciu szeregu potęgowego $\Delta(q)^m$, co oznaczamy: $\Delta_m(N)$. Uzasadnienie jest analogiczne do uzasadnienia sum liczb kwadratowych, w poprzednim rozdziale.

CZĘŚĆ GŁÓWNA

Twierdzenie 17.1

Dla dowolnej liczby całkowitej, dodatniej N zachodzi wzór:

$\Delta_2(N) =$ (liczba dodatnich dzielników $4N+1$ kongruentnych z $1 mod 4$) –

– (liczba dodatnich dzielników $4N+1$ kongruentnych z $1 mod 3$).

Dowód.

Na początku przypomnijmy wzór (15.7):

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn} z^{m+n} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} z^{-m-n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^{n-1})}{(1-zq^{n-1})^2(1-z^{-1}q^n)^2}.$$

Jeżeli dokonamy podstawień: $q = -q$, $z = -\sqrt{q}$, gdzie $0 < q < 1$, prawa strona równości będzie wyglądała w sposób następujący:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-q)^n)^2\left(1-\left(-\sqrt{q}\right)^{-2}(-q)^n\right)\left(1-\left(-\sqrt{q}\right)^{2}(-q)^{n-1}\right)}{(1-(-\sqrt{q})(-q)^{n-1})^2(1-(-\sqrt{q})^{-1}(-q)^n)^2} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n q^n)^2 (1-(-1)^n q^{n-1})(1+(-1)^n q^n)}{(1-(-1)^n q^{n-1/2})^2 (1+(-1)^n q^{n-1/2})^2} =$$

$$= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n q^n)^2 (1+(-1)^n q^n)^2}{(1-(-1)^n q^{n-1/2})^2 (1+(-1)^n q^{n-1/2})^2} =$$

$$= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n-1})^2} = 2\Delta(q)^2.$$

Ostatnia równość wynika ze wzoru (12.8):

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}.$$

Zajmijmy się teraz przekształceniem lewej strony.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}(-q)^{mn}(-\sqrt{q})^{m+n}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-q)^{mn}(-\sqrt{q})^{-m-n}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^{mn+m+n}q^{mn+(m+n)/2}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}q^{mn-(m+n)/2}=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-1}q^{mn-(m+n)/2}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}q^{mn-(m+n)/2}$$

Dokonamy teraz podstawień: $m=m-1,\ n=n-1$ w pierwszej sumie. Otrzymujemy:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{(m-1)(n-1)-1}q^{(m-1)(n-1)-(m+n-2)/2}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}q^{mn-(m+n)/2}=$$

$$=\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}\,q^{mn-m-n+1-1+(m+n)/2}-\sum_{m,n=1}^{\infty}(-1)^{mn-m-n}q^{mn-(m+n)/2}=$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-m-n} q^{mn-(m+n)/2} - \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-m-n} q^{mn-(m+n)/2}$$

Jeżeli $m + n$ jest nieparzyste, odpowiadające wyrazy dwóch sum znikają. Lewą stronę możemy zapisać w sposób następujący:

$$2 \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m+n\ parz.}} (-1)^{mn-1} q^{mn-(m+n)/2} = 2 \sum_{\substack{mn\geq 1 \\ m,n\ niep.}} q^{mn-(m+n)/2} - \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n\ parz.}} q^{mn-(m+n)/2}.$$

Otrzymujemy stąd, że:

$$2\Delta(q)^2 = 2 \sum_{\substack{mn\geq 1 \\ m,n\ niep.}} q^{mn-(m+n)/2} - 2 \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n\ parz.}} q^{mn-(m+n)/2}.$$

Zatem:

$$\Delta(q)^2 = \sum_{\substack{mn\geq 1 \\ m,n\ niep.}} q^{mn-(m+n)/2} - \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n\ parz.}} q^{mn-(m+n)/2}.$$

$$\Delta(q)^2 = \sum_{\substack{mn\geq 1\\ m,n\ niep.}} q^{mn-(m+n)/2} - \sum_{\substack{m,n\geq 1\\ m,n\ parz.}} q^{mn-(m+n)/2}$$

Wyraz $\pm q^N$ pojawia się po prawej stronie wtedy i tylko wtedy, gdy $N = mn - \frac{m+n}{2}$ lub dla $4N + 1 = 4mn - 2m - 2n + 1 = (2m-1)(2n-1)$ dla $m, n > 0$, gdzie oba wyrazy m, n parzyste lub oba wyrazy nieparzyste. Jeżeli oba nieparzyste to $2m - 1 \equiv 1 mod 4$, natomiast jeżeli oba parzyste to $2m - 1 \equiv 3 mod 4$. Stąd wynika, że każdy czynnik $4N + 1$ kongruentny z $1 mod 4$ oraz kongruentny z $3 mod 4$, co kończy dowód. $\square$

*W szczególności, jeżeli $4\mathrm{N} + 1$ jest liczbą pierwszą, mamy następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 17.1

Jeżeli N jest dodatnią liczbą całkowitą, taką, że $4N + 1$ jest liczbą pierwszą, wtedy N może być przedstawione jednoznacznie jako suma dwóch różnych liczb trójkątnych, zliczając w kolejności.

Dowód.

Oczywiste jest, że jeżeli $4N + 1$ jest liczbą pierwszą, to dzielnikami tej liczby są: 1 oraz $4N + 1$, oba dzielniki są kongruentne z $1 mod 4$. Z twierdzenia 17.1 mamy, że $\Delta_2(N) = 2 - 0 = 2$. Zwróćmy uwagę, że moc w tej definicji to współczynnik w szeregu potęgowym $\Delta(q)^m, \Delta_m$ liczba dowolnie uporządkowanych składników sumy. Stąd, $\Delta_2(N) = 2$ oznacza, że wszystkimi możliwościami prezentacji N jako sumy dwóch liczb trójkątnych to:

$$N = \Delta_k + \Delta_l = \Delta_l + \Delta_k, k \neq l$$

lub

$$N = \Delta_k + \Delta_k = \Delta_l + \Delta_l, k \neq l.$$

Drugi przypadek jest oczywiście niepoprawny, ponieważ ciąg $\{\Delta_n\}_{n\geq 0}$ jest ściśle rosnący. Alternatywnym sposobem, aby odrzucić drugi przypadek jest zauważenie, że $N = 2\Delta_k$ co oznacza, że $4N + 1 = 4\left(2 \cdot \frac{k(k+1)}{2}\right) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$. Oczywiście nie jest to liczba pierwsza, dlatego też dowód jest skończony. $\square$

Przykład 1.

$$7 = 1 + 6$$

$4 \cdot 7 + 1 = 29$ (jest to liczba pierwsza); składniki to liczby trójkątne: $\Delta_1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, $\Delta_3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$

Przykład 2.

$$13 = 3 + 10$$

Przykład 3.

$$43 = 15 + 28$$

Twierdzenie 17.2

$$\Delta_4(N) = \text{suma wszystkich dzielników wyrażenia } 2N+1.$$

Dowód.

Na początku przypomnijmy wzór (15.7):

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn} z^{m+n} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} z^{-m-n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^{n-1})}{(1-zq^{n-1})^2(1-z^{-1}q^n)^2}.$$

Obustronnie dzielimy przez: $1-q^2z^{-2}$. Podstawiamy: $q = q^2,\ \mathrm{z} = \mathrm{q}$. Prawa strona równania:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2(1-q^{-2}q^{2n})(1-q^2q^{2n-2})}{(1-qq^{2n-2})^2(1-q^{-1}q^{2n})^2(1-q^4q^{-2})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})^2(1-q^{2n-1})^2} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})^2(1-q^{2n-1})^2} = \Delta(q)^4.$$

Ostatnia równość wynika ze wzoru (12.8), wspomnianego w dowodzie twierdzenia 17.1

Przejdźmy teraz do lewej strony równania. Skorzystamy z reguły de l'Hospitala.

$$\lim_{z\to q}\frac{1}{1-q^2z^{-2}}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}q^{2mn}z^{m+n}-\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{2mn}z^{-m-n}\right)=$$

$$=\lim_{z\to q}\frac{1}{2q^2z^{-3}}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}(m+n)q^{2mn}z^{m+n-1}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)q^{2mn}z^{-m-n-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2q^{-1}}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}(m+n)q^{2mn+m+n-1}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)q^{2mn-m-n-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-2)q^{2mn-m-n}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n)q^{2mn-m-n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}(2m+2n-2)q^{2mn-m-n}\right)=\sum_{m,n=1}^{\infty}(m+n-1)q^{2mn-m-n}$$

Ponieważ wyrażenie jest symetryczne ze względu na m oraz n, możemy zapisać, że:

$$\Delta(q)^4 = \sum_{m,n=1}^{\infty} (2m-1)q^{2mn-m-n}.$$

Biorąc $k = 2m-1,\ l = 2n-1$, otrzymujemy:

$$\Delta(q)^4 = \sum_{\substack{k,l \leq 1 \\ k,l\ niep.}}^{\infty} kq^{(kl-1)/2}.$$

Wyraz q^N pojawia się w sumie wtedy i tylko wtedy, gdy $N = \frac{kl-1}{2}$, lub $2N+1 = kl$, dla nieparzystych k oraz l. Stąd otrzymujemy, że każdy dzielnik $2N+1$ jest nieparzysty, współczynnikiem wyrazu q^N jest:

$$\sum_{k|2N+1} k. \quad \square$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ