# Q-CAŁKA

Paweł Krajewski

# DEFINICJA Q-CAŁKI NIEOZNACZONEJ

Zdefiniujmy pojęcie q-całki nieoznaczonej i podajemy jej podstawowe własności.

**Definicja 2.1.1**.. Funkcja F(x) jest jakąś funkcją q-pierwotną funkcji f(x) jeżeli $D_q F(x)=f(x)$. Oznaczamy

$$\int f(x) d_q x. \tag{2.1}$$

Zauważmy, że mówimy "jakaś" funkcja pierwotna, ponieważ tak, jak w zwyczajnym rachunku całkowym, funkcja q-pierwotna nie jest jednoznaczna. W zwyczajnym rachunku całkowym jednoznaczność funkcji pierwotnej zależy od stałej, ponieważ pochodna funkcji znika wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona stałą. W rachunku q-całkowym sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. $D_q\varphi(x) = 0$ Wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(qx) = \varphi(x)$, co wcale nie musi implikować, że $\varphi$ jest stałą. Dodanie takiej funkcji $\varphi$ nie zmienia q-pochodnej funkcji. Jednakże, jeśli potrzebujemy, aby $\varphi$ była szeregiem formalnym, warunek $\varphi(qx) = \varphi(x)$ implikuje $q^n c_n = c_n$ dla każdego n, gdzie $c_n$ jest współczynnikiem przy $x_n$. Jest to możliwe tylko kiedy $c_n = 0$ dla dowolnego $n \geq 1$, $\varphi$ jest stałą.

Co więcej, jeżeli:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest szeregiem formalnym, wtedy pośród szeregów formalnych, f(x) ma jednoznaczną funkcję q-pierwotna z dokładnościa do stałei i iest to:

$$\int f(x) d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{[n+1]} + C \qquad (2.2)$$

Jeżeli jednak f(x)jest dowolną funkcją nadal możemy uzyskać jednoznaczność poprzez wprowadzenie pewnych warunków dla funkcji q-pierwotnej. Rozważmy ponownie funkcję podobną do funkcji okresowej, ale okres staje się coraz mniejszy im x jest bliższy 0. Ustalmy dla przykładu q= 0.1. Teraz przykłady okresów naszej funkcji to będą (0.1,1], (0.01,0.1], (0.001,0.01], itd. Jeżeli wykres φ w (0.1,1] jest funkcją liniową, ale nie stałą, w okresach bliższych 0, wykres będzie miał taką samą postać, ale staje się coraz bardziej stromy, co powoduje, że φ nie jest ciągłe w x= 0. Ogólna idea zawiera się w następującym wniosku:

**Wniosek 2.1.1..** Niech 0< q <1. Wtedy, z dokładnością do stałej, każda funkcja f(x) ma co najwyżej jedną funkcję q-pierwotną ciągłą w x= 0.

Dowód. Załóżmy, że F1 i F2 są dwiema funkcjami q-pierwotnymi f ciągłymi w x= 0. Niech ϕ=F1−F2. Funkcja ϕ jest także ciągła w x= 0 i spełnia warunek ϕ(qx)=ϕ(x) dla każdego x, ponieważ Dqϕ= 0. Niech dla jakiegoś A>0,

$$\begin{aligned} m &= \inf\{\phi(x) | qA \leq x \leq A\}, \\ M &= \sup\{\phi(x) | qA \leq x \leq A\}, \end{aligned}$$

które może być nieskończonością, jeżeli φ jest nieograniczone. Zakładając, m < M, przynajmniej jedno ze zdań jest prawdziwe: φ(0) ≠ m albo φ(0)≠M. Zauważmy, że w przeciwnym wypadku musi być, że φ(0) =m i φ(0) =M, czyli m=M co oznacza, że φ jest stała, a to prowadzi do sprzeczności. Załóżmy więc, że φ(0) ≠ m jest prawdziwe. Z ciągłości w x= 0 i wybranego, odpowiednio małego ε >0 możemy zawsze znaleźć taką δ >0, że

$$m + \epsilon \notin \phi(0, \delta). \tag{2.3}$$

Z drugiej strony, $q^N A < \delta$ dla jakiegoś dużego N. Z $\varphi(qx) = \varphi(x)$ mamy, że

$$m + \epsilon \in (m, M) \subset \phi[qA, A] = \phi[q^{N+1}A, q^N A] \subset \phi(0, \delta),$$

co prowadzi do sprzeczności z (2.3). Co więcej, m=M i φ jest stała na przedziale[qA,A], co oznacza, że jest stała wszędzie.□

Na zakończenie rozdziału zaprezentuję formułę q-całkowania przez podstawienie zmiennej u=u(x)=αxβ, gdzie α i β są stałymi. Załóżmy, że F(x) jest funkcją

q-pierwotną f(x). Wtedy

$$\int f(u) d_q u = F(u) = F(u(x)).$$

Aby obliczyć F(u) skorzystam ze wzoru łańcuchowego, który pozwala obliczyć q-pochodną f(u(x)), gdzie u(x) jest postaci u(x) =αx^(ß)

$$D_q f(u(x)) = (D_q^\beta f)(u(x)) \cdot D_q(u(x)) \tag{2.4}$$

Zatem dla dowolnego q′, korzystając z (2.4),

$$
\begin{aligned}
F(u(x)) &= \int D_{q'} F(u(x)) d_{q'} x \\
&= \int (D_{q'^{\beta}} F)(u(x)) \cdot D_{q'} u(x) d_{q'} x \qquad (2.5) \\
&= \int (D_{q'^{\beta}} F)(u(x)) d_{q'} u(x).
\end{aligned}
$$

# CAŁKA JACKSON’A ROZDZIAŁ 19

**Konstrukcja całki Jackson’a.**

Przedstawię tutaj konstrukcję całki Jackson’a. Założmy, że f(x) jest dowolną, ustaloną funkcją. Dla stworzenia funkcji q-pierwotnej wymagany jest operator ˆMq Jest to operator liniowy na przestrzeni wielomianów, który ma taką własność, że:

$$\hat{M}_q(F(x)) = F(qx)$$

Na mocy definicji q-pochodnej:

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

Mamy, że

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = D_q F(x) = f(x) \tag{3.1}$$

Zwróćmy uwagę, że kolejność poszczególnych równości jest istotna ze względu na operator. Możemy teraz, wyznaczyć F(x) z pierwszej części równania przenosząc wszystko inne z lewej strony na prawą. Później traktujemy $\frac{1}{1-\hat{M}_q}$ jako szereg geometryczny i rozwijamy. Otrzymujemy:

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q - 1)F(x) = f(x)$$

$$F(x) = \frac{f(x)(q-1)x}{\hat{M}_q - 1}$$

$$F(x) = \frac{1}{1-\hat{M}_q}\big((1-q)xf(x)\big) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} \hat{M}_q^j \big(xf(x)\big).$$

Wiedząc, że $\hat{M}_q\big(xf(x)\big) = qxf(qx)$ Rozwijamy szereg geometryczny:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{M}_q^j\big(xf(x)\big) = \hat{M}_q^0\big(xf(x)\big)+\hat{M}_q^1\big(xf(x)\big)+\hat{M}_q^2\big(xf(x)\big)+\ldots = xf(x)+qxf(qx)+q^2xf(q^2x)+\ldots$$

$$= x\big(f(x) + qf(qx) + q^2f(q^2x) + \ldots\big) = x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x).$$

Zatem otrzymujemy, że:

$$\int f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x). \tag{3.2}$$

Podane wyrażenie nazywamy całką Jackson'a z f(x). Z tej definicji możemy otrzymać kolejną formułę:

$$\int f(x)D_q g(x)d_q x = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)D_q g(q^j x)$$

$$= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\frac{g(q^j x)-g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}. \qquad (3.3)$$

Zauważmy, że z definicji q-pochodnej i q-różniczki mamy:

$$\int f(x)D_q g(x)d_q x = \int f(x)\frac{g(qx)-g(x)}{qx-x}(qx-x) = \int f(x)\big(g(qx)-g(x)\big) = \int f(x)d_q g(x)$$

Zatem formułę (3.3) możemy zapisać jako:

$$\int f(x)d_q g(x) = (1-q)x\frac{1}{(1-q)x}\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\frac{g(q^j x)-g(q^{j+1}x)}{q^j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\big(g(q^j x)-g(q^{j+1}x)\big). \qquad (3.4)$$

Zapisaliśmy formuły dla całki Jackson'a, ale nie wiemy jeszcze dla jakich warunków taka całka istnieje. Czyli dokładniej, kiedy jest zbieżna. Jest o tym mowa w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 3.1.1.. Niech 0< q <1. Jeżeli|f(x)xα|jest ograniczona na przedziale (0,A] dla dowolnego 0 ≤α <1, to wtedy całka Jackson'a zdefiniowana w (3.2) zbiega do funkcji F(x) na (0,A], która jest funkcją q-pierwotną f(x). Co więcej, F(x)jest ciągła w x= 0 oraz F(0) = 0.

Dowód. Załóżmy, że|f(x)xα|< M na (0,A]. Dla dowolnego 0< x≤A, j≥0, korzystając z podstawowych przekształceń mamy, że:

$$|f(x)x^{\alpha}| < M \Rightarrow |f(x)| < M(x)^{-\alpha} \Rightarrow |f(q^j x)| < M(q^j x)^{-\alpha}.$$

Dalej, dla dowolnego 0< x ≤A , mamy:

$$|q^j f(q^j x)| < Mq^j (q^j x)^{-\alpha} = Mq^j q^{-j\alpha} x^{-\alpha} = Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j. \qquad (3.5)$$

Zaczynając od $|f(x)x^{\alpha}| < M$ i za pomocą przekształceń otrzymaliśmy dokładnie nasz szereg z (3.2) Ponieważ $1-\alpha > 0$ i $0 < q < 1$, możemy zauważyć, że ten szereg jest ograniczony z góry przez szereg geometryczny, który jest zbieżny. Ponieważ prawa strona (3.2) zbiega punktowo do F(x). Wynika z tego bezpośrednio, że $F(0) = 0$. Ciągłość F(x) w $x = 0$, czyli, że całe wyrażenie z (3.2) zbiega do 0 dla $x \to 0$, jest oczywiste, skoro pokazaliśmy, że szereg jest zbieżny, to teraz pokażemy, że całe wyrażenie F(x) jest zbieżne. Z (3.5) wiemy, że:

$$|q^j f(q^j x)| < M x^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^j.$$

Zauważmy, że

$$\sum_{j=0}^{\infty} (q^{1-\alpha})^j = \frac{1}{1 - q^{(1-\alpha)}}.$$

Zatem, sumując obustronnie naszą nierówność mamy:

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\right| < \frac{Mx^{-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}$$

$$\left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\right| < \frac{M(1-q)x^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}, \qquad 0 < x \leq A.$$

Aby udowodnić, że F(x) jest funkcją q-pierwotną obliczymy q-pochodną:

$$D_qF(x) = \frac{1}{(1-q)x}\left((1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - (1-q)qx\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^{j+1}x)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1} f(q^{j+1}x) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) - \sum_{j=1}^{\infty} q^j f(q^j x) = f(x).$$

Zauważmy, że jeżeli x∈(0,A] i 0< q <1, to q x∈(0,A] i q-pochodna jest dobrze określona.

Z Wniosku 2.1.1 i Twierdzenia 3.1.1 wynika, że całkowanie formułą Jakson'a zapewnia jednoznaczną q-całkę która jest ciągła w x= 0 z dokładnością do stałej. Z drugiej strony, jeżeli wiemy , że F(x) jest funkcją q-pierwotną f(x) i F(x) jest ciągła w x= 0, to F(x) musi być, w zależności od stałej możliwa do wyznaczenia za pomocą formuły Jackson'a (3.2), ponieważ częścią sumy całkowania według formuły Jackson'a jest:

$$(1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j f(q^j x) = (1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j \left. D_q F(t)\right|_{t=q^j x}$$

$$= (1-q)x\sum_{j=0}^{N} q^j \left(\frac{F(q^j x) - F(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}\right) = \sum_{j=0}^{N}\Big(F(q^j x) - F(q^{j+1}x)\Big) = F(x) - F(q^{N+1}x),$$

co zbiega do F(x)−F(0) przy N→∞, z ciągłości F(x) w x= 0.

## Definicja q-całki oznaczonej

Wykorzystamy całkę Jackson'a, żeby zdefiniować cakę oznaczoną.

**Definicja 3.2.1**..Niech 0< a < b. Wtedy całką oznaczoną nazywamy:

$$\int_0^b f(x)d_qx = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{3.6}$$

i

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx \tag{3.7}$$

Korzystając z (3.6) możemy otrzymać bardziej ogólną formułę:

$$\int_0^b f(x)d_qg(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j b)\big(g(q^j b) - g(q^{j+1}b)\big). \tag{3.8}$$

Zauważmy, że definicja potwierdza fakt, że całka Jacksona znika przy x= 0 Nie otrzymamy dobrze określonej definicji q-całki niewłaściwej zapisując po prostu, że b→ ∞ w (3.6). Zamiast tego, ponieważ:

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx = \int_0^{q^j} f(x)d_qx - \int_0^{q^{j+1}} f(x)d_qx$$

$$= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f(q^j + k) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f(q^{j+k+1}),$$

oraz dalej

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx = (1-q)q^j f(q^j), \tag{3.9}$$

Teraz możemy zdefiniować całkę q-niewłaściwą z f(x) na zbiorze [0,∞).

**Definicja 3.2.2..**

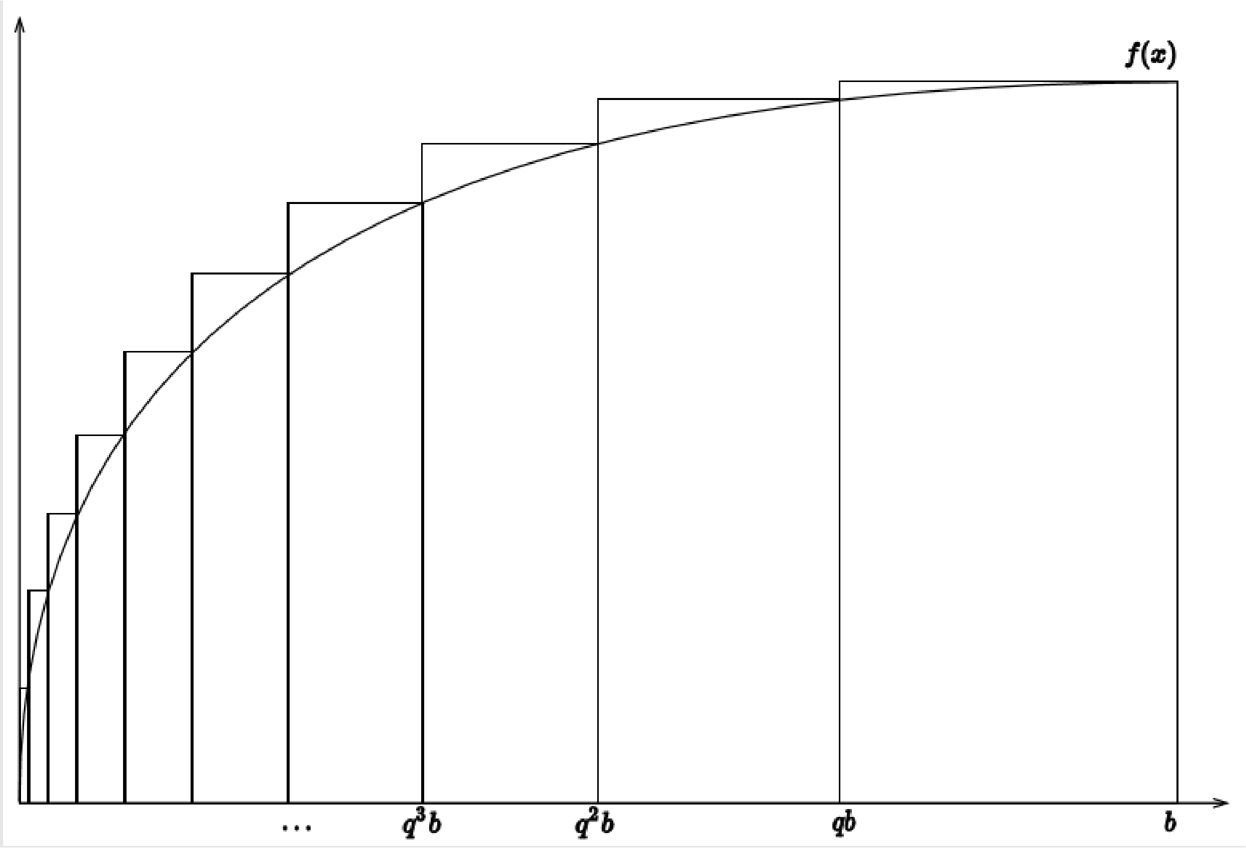
$$\int_0^\infty f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_qx \tag{3.10}$$

dla 0 <q< 1, albo

$$\int_0^\infty f(x)d_qx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)d_qx \tag{3.11}$$

dla q > 1.

## Interpretacja graficzna.



Na koniec chciałbym prze

**Wniosek 3.4.1..** Q-całka niewłaściwa zdefiniowana wyżej jest zbieżna, jeżeli $x^\alpha f(x)$ jest ograniczone w otoczeniu x= 0 dla jakiejś α <1oraz dla odpowiednio dużego x z jakąś α >1

Dowód. Korzystając z (3.9) mamy, że

$$\int_0^\infty f(x) d_q x = |1-q| \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f(q^j). \tag{3.12}$$

Ponieważ nasza suma:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f(q^j) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j) + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f(q^{-j})$$

nie zmieni się, jeżeli zastąpimy q, q−1 warto rozważyć przypadek dla q <1. Zbieżność pierwszej sumy wynika wprost z (3.1).

W przypadku drugiej sumy zauważmy, że dla dużych x mamy, że $|x^\alpha f(x)| < M$

gdzie $\alpha > 1$ i $M > 0$. Wtedy dla odpowiednio dużego j mamy, że

$$|q^{-j} f(q^{-j})| = q^{j(\alpha-1)} |q^{-j\alpha} f(q^{-j})| < M q^{j(\alpha-1)}.$$

Czyli udało nam się ograniczyć 2 sumę za pomocą szeregu geometrycznego, a więc całość jest zbieżna co kończy dowód.