20. Podstawowe twierdzenie q-rachunku całkowego i całkowanie przez części

Sformułujemy q-odpowiednik podstawowego twierdzenia rachunku całkowego (znanego nam z Analizy Matematycznej jako wzór Leibniza - Newtona).

Twierdzenie 20.1 (*Podstawowe twierdznie q-rachunku całkowego*). *Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ oraz $F(x)$ jest ciągła w $x = 0$, zachodzi*

$$\int_a^b f(x)d_qx = F(b) - F(a), \tag{20.1}$$

gdzie $0 \le a \le \infty$.

Dowód. Ponieważ $F(x)$ jest ciągła w $x = 0$, więc możemy skorzystać ze wzoru Jacksona. Wtedy

$$F(x) = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) + F(0).$$

Ponieważ z definicji

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a),$$

więc otrzymujemy

$$\int_0^a f(x)d_qx = F(a) - F(0).$$

Analogicznie, dla skończonego b zachodzi

$$\int_0^b f(x)d_qx = F(b) - F(0).$$

Zatem

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx = F(b) - F(a).$$

Przyjmijmy $a = q^{j+1}$ (lub q^j) oraz $b = q^j$ (lub q^{j+1}) dla $0 < q < 1$ (lub $q > 1$). Wówczas, korzystając z definicji całki niewałściwej (19.12), widzimy, że wzór (20.1) jest prawdziwy dla $b = \infty$, o ile tylko istnieje granica $\lim_{x\to\infty} F(x)$. □

Wniosek 20.2. *Niech $f'(x)$ będzie pochodną $f(x)$. Jeżeli $f'(x)$ istnieje w otoczeniu $x=0$ i jest ciągła w $x=0$, zachodzi*

$$\int_a^b D_q f(x) d_q x = f(b) - f(a). \tag{20.2}$$

Dowód. Stosując regułę de L'Hospitala otrzymjemy

$$\lim_{x\to\infty} D_q f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{qf'(qx)-f'(x)}{q-1} = f'(0).$$

Przyjmując $(D_q f)(0) := f'(0)$, możemy przedłużyć $D_q f$ do funkcji ciągłej w $x=0$. Wtedy wzór (20.2) wynika z twierdzenia 20.1. □

Teraz sformułujemy q odpowiednik reguły całkowania przez części.

Załóżmy, że $f(x)$ oraz $g(x)$ są takimi funkcjami, że ich pochodne istnieją w $x=0$ i są ciągłe w $x=0$. Stosując wzór (1.12) mamy

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x)).$$

Ponieważ iloczyn funkcji różniczkowalnych jest różniczkowalny możemy zastosować wniosek 20.2 i wówczas otrzymujemy

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)(D_q g(x)) d_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x)) d_q x,$$

lub

$$\int_a^b f(x) d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) d_q x, \tag{20.3}$$

czyli q odpowiednik znanego wzoru na całkowanie przez części. Zauważmy, że powyższy wzór obejmuje również przypadek, gdy $b=\infty$.

Stosując wzór na q całkowanie przez części uzyskamy wzór q-Taylora z resztą Cauchy'ego. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 20.3. *Załóżmy, że $D_q^j f(x)$ jest ciągła w $x=0$ dla każdego $j \le n+1$. Wówczas zachodzi*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} (D_q^j f)(a) \frac{(b-a)_a^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!} \int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n d_q x. \tag{20.4}$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Ponieważ $D_q f(x)$ jest ciągła w $x=0$, więc z twierdzenia 20.1 zachodzi

$$f(b) - f(a) = \int_a^b D_q f(x) d_q x = -\int_a^b D_q f(x) d_q (b-x).$$

To pokazuje, że wzór (20.4) jest prawdziwy dla $n=0$. Załóżmy, że (20.4) jest prawdziwy dla $n-1$. Wtedy

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} (D_q^j f)(a) \frac{(b-a)_a^j}{[j]!} + \frac{1}{[n-1]!} \int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} d_q x.$$

Stosując wzór (3.11) oraz wzór (20.3) na q całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} d_q x = -\frac{1}{[n]}\int_a^b D_q^n f(x) d_q (b-x)_q^n =$$
$$= D_q^n f(a)\frac{(b-a)^n}{[n]} + \frac{1}{[n]}\int_a^b (b-qx)_q^{n+1} f(x) d_q x.$$

Zatem

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} (D_q^j f)(a)\frac{(b-a)_a^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!}\int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n d_q x.$$

.

$\square$

21. Funkcje q-Gamma i q-Beta

Na początku przypomnijmy definicje funkcji gamma i beta oraz ich najważniejsze własności.
Dla $t > 0$ *funkcją gamma* nazywamy

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e{-}x dx. \tag{21.1}$$

Dla $s, t > 0$ *funkcją beta* nazywamy

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1} dx. \tag{21.2}$$

Niektóre z ich własności to:

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t), \tag{21.3}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \text{jeżeli } n \text{ jest dodatnią liczbą całkowitą,} \tag{21.4}$$

$$B(n) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}. \tag{21.5}$$

Sformułejemy q odpowiedniki powyższych funkcji oraz ich własności.

Definicja 21.1. Dla każdego $t > 0$,

$$\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \tag{21.6}$$

nazywamy *funkcją q-gamma*.

Zauważmy, że z definicji (9.10) $E_q^0 = 1$. Ponadto, z definicji (9.7) oraz zależności (9.13) mamy $E_q^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} 1/e_q^x = 0$.

Korzystając z równości (9.11) oraz wzoru na q całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int_0^\infty x^t E_q^{-qx} d_q x = -\int_0^\infty x^t d_q E_q^{-x} = [t] \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x.$$

Stąd, dla każdego $t > 0$

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\Gamma_q(t). \tag{21.7}$$

Ponieważ

$$\Gamma_q(1) = \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x = E_q^0 - E_q^{-\infty} = 1,$$

więc dla każdego n nieujemnego całkowietego

$$\Gamma_q(n+1) = [n]!. \tag{21.8}$$

Definicja 21.2. Dla każdych $t, s > 0$

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1} d_q x \tag{21.9}$$

nazywamy *funkcją q-beta*.

Korzystając z definicji całki właściwej (19.7) i niewłaściwej (19.12) oraz z faktu, że $(1-q^{j+1})_q^\infty = 0$ dla każdego j ujemnego całkowitego, otrzymujemy

$$B_q(t,\infty) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^j a)^{t-1} (1-q^{j+1})_q^\infty =$$

$$= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j (q^j a)^{t-1} (1-q^{j+1})_q^\infty = \int_0^\infty x^{t-1} (1-qx)_q^\infty d_q x.$$

Aby pokazać relację pomiędzy $\Gamma_q(t)$ oraz $B_q(t,s)$ skorzystamy ze wzoru $E_q^x = (1+(1-q)x)_q^\infty$. Wówczas zachodzi

$$B_q(t,\infty) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-\frac{qx}{(1-q)}} d_q x.$$

Przedstawiając zmianę x jako $x = (1-q)y$ otrzymujemy

$$B_q(t,\infty) = (1-q)^t \int_0^\infty y^{t-1} E_q^{-qy} d_q y$$

lub

$$\Gamma_q(t) = \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t}. \tag{21.10}$$

Wprowadzenie kolejnej zmiennej s pomoże nam uprościć nasze zagadnienie.

Twierdzenie 21.3. (a) *Jeżeli $t > 0$ oraz n jest liczbą całkowitą dodatnią, zachodzi*

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}. \tag{21.11}$$

(b) *Dla każdych $t, s > 0$ zachodzi*

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}(1-q^{t+s})_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}}. \tag{21.12}$$

Dowód. (a) Stosując wzór (3.11) oraz na q całkowanie przez części, dla każdego $t > 1$ oraz $s > 0$, otrzymujemy

$$B_q(t,s) = -\frac{1}{[s]}\int_0^1 x^{t-1} d_q(1-x)_q^s = \frac{[t-1]}{[s]}\int_0^1 x^{t-2}(1-qx)_q^s d_q x,$$

i stąd

$$B_q(t,s) = \frac{[t-1]}{[s]} B_q(t-1, s+1). \tag{21.13}$$

Jednocześnie zachodzi

$$B_q(t,n+1) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1}(1-q^n x) d_q x =$$
$$= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1} d_q x - q^n \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1} d_q x,$$

zatem

$$B_q(t,n+1) = B_q(t,n) - q^n B_q(t+1,n). \tag{21.14}$$

Wówczas z (21.13) oraz (21.14) otrzymujemy

$$B_q(t,n+1) = B_q(t,n) - \frac{q^n[t]}{[n]} B_q(t,n+1),$$

lub

$$B_q(t,n+1) = \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}} B_q(t,n), \tag{21.15}$$

dla każdego $t > 0$ oraz n całkowitego dodatniego. Ponieważ

$$B_q(t,1) = \int_0^1 x^{t-1} d_q x = \frac{1}{[t]},$$

więc zachodzi

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q^{t+n-1})\cdots(1-q^{t+1})[t]} = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n},$$

co kończy dowód punktu (a).

(b) Ponieważ

$$(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{(1-q^t)_q^n} = \frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty},$$

więc (21.12) jest prawdziwe dla $s = 1, 2, 3, \ldots$. Lewą stronę równania (21.12) możemy zapisać jako

$$\int_0^1 \frac{x^{t-1}(1-qx)_q^\infty}{(1-ax)_q^\infty} d_q x.$$

Prawą stronę równania (21.12) możemy wyrazić jako

$$\frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-aq^t)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-a)_q^\infty},$$

gdzie $a = q^s$. Wówczas obydwie strony (21.12) są formalnymi szeregami potęgowymi w q. Odpowiadające współczynniki są równe dla nieskończenie wielu wartości a, to znaczy $a = q, q^2, q^3, \ldots$. Ponieważ wszystkie współczynniki są wielomianami w a oraz różne wielomiany mogą zgadzać się dla skończonej ilości punktów, więc obydwa szeregi mają identyczne współczynniki, co dowodzi ich równości.

□

Niech w (21.11) $n \to \infty$ i skorzystajmy z (21.10) oraz punktu (a) powyższego twierdzenia. Wówczas możemy wyrazić funkcję q-gamma w następujący sposób

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty}. \tag{21.16}$$

Punkt (b) pokazuje, że funkcja q-beta jest symetryczna względem t i s, to znaczy, że zachodzi $B(t,s) = B(s,t)$.

Porównując (21.12) oraz (21.16) możemy wyrazić funkcję q-beta za pomocą funkcji q-gamma, analogicznie do własności (21.5):

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}. \tag{21.17}$$