h-pochodna i h-całka
Rozdział 22

Justyna Łojek

Maj 2020

Wstęp

Przypomnijmy z rozdziału pierwszego, dla dowolnej funkcji $f(x)$, h-różniczkę:

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

oraz h-pochodną:

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

gdzie $h \neq 0$. W szczególności mieliśmy, że:

$$d_h\big(f(x)g(x)\big) = f(x+h)d_h g(x) + g(x)d_h f(x)$$

Właściwości h-rachunku

Zacznijmy od omówienia właściwości h-rachunku w analogiczny sposób jak zrobiliśmy to dla q-rachunku.

H-pochodna iloczynu:

$$D_h\big(f(x)g(x)\big) = f(x)D_hg(x) + g(x+h)D_hf(x)$$

Ponieważ dla lewej strony, mamy:

$$\begin{aligned} D_h\big(f(x)g(x)\big) &= \frac{d_h\big(f(x)g(x)\big)}{d_hx} = \frac{f(x+h)d_hg(x) + g(x)d_hf(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x)) + g(x)(f(x+h)-f(x))}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x)f(x)}{h} \end{aligned}$$

dla prawej strony, mamy:

$$\begin{aligned} f(x)D_hg(x) + g(x+h)D_hf(x) &= f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \\ &+ g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-g(x)f(x)}{h} \end{aligned}$$

Zatem mamy równość.

H-pochodna ilorazu:

$$D_h\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_hf(x) - f(x)D_hg(x)}{g(x)g(x+h)}$$

Wynika z wzoru na h-pochodną iloczynu.

Definicja 1

H-odpowiednik dla dwumianu $(x-a)^n$ definiujemy:

$$(x-a)_h^n = (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)$$

gdzie $n \geq 0$ i $(x-a)_h^0 = 1$.

Policzmy h-pochodną tego dwumianu:

$$D_h(x-a)_h^n = \frac{1}{h}\Big((x-a+h)(x-a)\cdots(x-a-(n-2)h)$$
$$-(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-(n-1)h)\Big) =$$
$$(x-a)\cdots(x-a-(n-2)h)\frac{(x-a+h)-(x-a-(n-1)h)}{h}$$

Zatem, mamy:

$$D_h(x-a)_h^n = n(x-a)_h^{n-1}$$

Zauważmy, że h-odpowiednik liczby całkowitej n wynosi n oraz $(x-0)_h^n \neq x^n$.

H-wzór Taylora

H-wzór Taylora dla wielomianu $f(x)$ stopnia N:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \left({D_h}^j f\right)(a) \frac{(x-a)_h^j}{j!} \tag{1}$$

Przykład

H-odpowiednik dla funkcji $f(x) = (x+b)^N$, gdzie $a = 0$:

$$(x+b)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} b_h^{N-j} x_h^j$$

Przytoczymy kilka faktów, ich dowody są podobne do już przeprowadzonych dla q-odpowiednika.

$$\begin{aligned}
&(x-a)_h^{m+n} = (x-a)_h^n (x-a-nh)_h^m \\
&D_h (a-x)_n^n = -n(a-h-x)_h^{n-1} \\
&D_h \frac{1}{(x-a)_h^n} = -\frac{n}{(x+h-a)_h^{n+1}} \\
&D_h \frac{1}{(a-x)_h^n} = \frac{n}{(a-x)_h^{n+1}} \quad \text{oraz} \quad {(x-a)_h}^{-n} = \frac{1}{(x-a+nh)_h^n}
\end{aligned}$$

h-odpowiednik funkcji wykładniczej e^x

Omówmy teraz h-odpowiednik funkcji wykładniczej $f(x) = e_h^x$. Trzy właściwości które $f(x)$ powinna mieć:

(*i*) $f(0) = 1$,

(*ii*) $D_h f(x) = f(x)$,

(*iii*) $f(x)$ można rozwinąć wokół 0 dla wzoru h-Taylora dla małych h (z $N = \infty$).

Te trzy właściwości jednoznacznie charakteryzują $f(x)$, z punktów (i) oraz (ii) wiemy, że $(D_h{}^j f)(0) = 1$ dla dowolnych $j = 0, 1, \ldots$.
Z wzoru numer (1) mamy dla $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-0)_h^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x(x-h)\cdots(x-(j-1)h)}{j!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\frac{x}{h}(\frac{x}{h}-1)\cdots(\frac{x}{f}-j+1))h^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{x/h}{j} h^j$$

Zatem mamy

$$e_h^x = (1+h)^{\frac{x}{h}}$$

W szczególności $e_1^x = 2^x$ oraz przy $h \to 0$ wyrażenie $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ zbiega do e. Zauważamy, że

$$D_h e_h^{\alpha x} = \frac{(1+h)^{\frac{\alpha(x+h)}{h}} - (1+h)^{\frac{\alpha x}{h}}}{h} = \frac{(1+h)^{\alpha} - 1}{h} \underbrace{(1+h)^{\frac{\alpha x}{h}}}_{e_h^{\alpha x}}$$

zatem

$$D_h e_h^{\alpha x} = [\alpha]_{1+h} e_h^{\alpha x} \quad \text{ponieważ} \quad [\alpha]_{1+h} = \frac{(1+h)^{\alpha} - 1}{1+h-1} = \frac{(1+h)^{\alpha} - 1}{h}$$

Jeżeli $D_h F(x) = f(x)$ to $F(x)$ nazywana jest h-pierwotną funkcją f(x) i piszemy:

$$\int f(x)\, d_h x$$

H-całka na przedziale z $x = a$ do $x = b$, gdzie a i b różnią się całkowitą wielokrotnością h, może być zdefiniowana jako skończona suma.

Definicja 2

Jeżeli $b - a \in h\mathbb{Z}$ to definiujemy określoną h-całkę jako:

$$\int_a^b f(x)\, d_h x = \begin{cases} h\big(f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b-h)\big) & \text{jeżeli } a < b \\ 0 & \text{jeżeli } a = b \\ -h\big(f(b) + f(b+h) + \cdots + f(a-h)\big) & \text{jeżeli } a > b \end{cases}$$

W definicji tej h-całka jest sumą Riemanna dla $f(x)$ w przedziale $[a, b]$.

Podstawowe twierdzenie h-rachunku

Twierdzenie 1

Podstawowe twierdzenie h-rachunku
Jeżeli $F(x)$ jest funkcją h-pierwotną od $f(x)$ i $b - a \in h\mathbb{Z}$, to:

$$\int_a^b f(x)\, d_h x = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Dowód

Jeżeli $b > a$ wtedy z definicji mamy:

$$\int_a^b f(x)\, d_h x = h \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a + jh) = h \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} D_h F(x)|_{x=a+jh} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} \big(F(a + (j+1)h) - F(a + jh)\big) = F(b) - F(a)$$

Przypadek, gdy $a > b$ jest podobny, natomiast przypadek gdy $a = b$ jest oczywisty.

Stosując Twierdzenie 1 do $D_h\big(F(x)g(x)\big)$ i stosując wzór na h-pochodną iloczynu, otrzymujemy wersję h-całkowania przez części:

$$\int_a^b f(x)\,d_hg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x+h)\,d_hf(x) \tag{3}$$

gdzie (przy założeniu, że $a < b$):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,d_hg(x) &= \int_a^b f(x)D_hg(x)\,d_hx = \\ &= h\sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh)(D_hg)(a+jh) = \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{(b-a)}{h}-1} f(a+jh)\big(g(a+jh+h)-g(a+jh)\big)\end{aligned}$$

Przyjmując $h = 1$ i że a, b są liczbami całkowitymi, gdzie $a < b$, dla funkcji $\varphi(x)$ definiujemy:

$$f(x) = \varphi(0) + \varphi(1) + \cdots + \varphi(x-1)$$

gdzie $x \in \mathbb{Z}_+$. Innymi słowy $D_1f(x) = \varphi(x)$.

Podstawiając do wzoru nr (3) otrzymujemy:

$$\sum_{j=a}^{b-1} \varphi(j)g(j+1) = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \sum_{j=a}^{b-1} f(j)\big(g(j+1) - g(j)\big)$$

Jeżeli $x - a \in h\mathbb{Z}$ to korzystając z wzoru nr (3) oraz wykorzystując poniższy wzór:

$$D_h(a-x)_n^n = -n(a-h-x)_h^{n-1}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x D_h f(t)\, d_h t = -\int_a^x D_h f(t)\, d_h(x-t) \\ &= \big(D_h f\big)(a)(x-a) + \int_a^x (x-h-t) D_h^2 f(t)\, d_h t \\ &= \big(D_h f\big)(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x D_h^2 f(t)\, d_h(x-t)_h^2 \\ &= \big(D_h f\big)(a)(x-a) + \frac{1}{2}\big(D_h^2 f\big)(a)(x-a)_h^2 - \frac{1}{6}\int_a^x D_h^3 f(t)\, d_h(x-t)_h^3 \end{aligned}$$

itd.

zatem dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(D_h^j f\right)(a)}{j!}(x-a)_h^j - \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x D_h^{n+1} f(t)\, d_h(x-t)_h^{n+1} \tag{4}$$

lub

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(D_h^j f\right)(a)}{j!}(x-a)_h^j + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t-h)_h^n D_h^{n+1} f(t)\, d_h t \tag{5}$$

Wzór ten nazywa się wzorem interpolacji Newtona. Z punktu widzenia h-rachunku jest to reszta we wzorze h-Taylora.
Załóżmy, że $h > 0$. Z Definicji 2 wartość bezwzględna powyższej reszty jest ograniczona przez:

$$\frac{1}{n!}|x-a|^{n+1} \max_{[a,x]} |D_h^{n+1} f|$$

Niech $x = a_m h$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wtedy całka we wzorze nr (5) jest równa:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Big((a+mh) - (a+jh) - h\Big)_h^n D_h^{n+1} f(a+jh)$$

z Definicji 2.

Ponieważ funkcja $g(t) = (a + mh - t - h)_h^n$ znika, kiedy $t = a + (m - l)h, a + (m - 2)h, ..., a + (m - n)h$, reszta we wzorze h-Taylora znika, kiedy m jest liczbą całkowitą od 1 do n. Całka oczywiście również znika, kiedy $m = O$. Zatem skończona suma we wzorze nr (5) jest dokładnie równa $f(x)$ przy $n + 1$ równomiernie rozmieszczonych punktach $x = a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh$. Natomiast suma, rozpatrywana jako funkcja od x, jest w rzeczywistości interpolacją wielomianu stopnia n, który przybliża dowolną funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b = a + nh]$.