Wielomiany Bernoulliego i liczby Bernoulliego. Sumy potęg

Na podstawie 23 i 24 rozdziału książki "Quantum Calculus" Victora Kaca i Pokmana Cheunga

opracował:
Jakub Stachów

Streszczenie

W pierwszej części prezentacji poznamy sekwencję wielomianów, która jest w bliskiej relacji do h-pierwotnej wielomianów i ma wiele ważnych zastosowań. Zdefiniujemy wielomiany i liczby Bernoulliego oraz zbadamy kilka ich własności.

Natomiast w drugiej części przyjrzymy się bliżej relacji między wielomianami Bernoulliego a rachunkiem h-różniczkowym.

Liczby Bernoulliego - wprowadzenie

Liczby Bernoulliego są ciągiem liczb wymiernych, które często pojawiają się w rozmaitych zagadnieniach związanych z teorią liczb. Zostały odkryte niemalże w tym samym czasie przez dwóch matematyków jednocześnie – przez Szwajcara Jacoba Bernoulliego (od którego wzięły one nazwę) oraz przez Japończyka Seki Kōwa. Występują one np. w rozwinięciach funkcji stycznych w szereg Taylora, we wzorze Faulhabera na sumę m-tych potęg pierwszych n dodatnich liczb całkowitych oraz w wyrażeniach dla niektórych wartości funkcji zeta Riemanna.

Definicja. W rozwinięciu Taylora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}, \qquad (23.1)$$

$B_n(x)$ są wielomianami x dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n. Są one znane jako *wielomiany Bernoulliego*.

Jeśli zróżniczkujemy obie strony powyższej równości względem x, otrzymamy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n{}'(x)}{n!} z^n = z\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^{n+1},$$

Porównując współczynniki dla z^n, gdzie $n > 1$, uzyskujemy:

$$B_n{}'(x) = nB_{n-1}(x). \qquad (23.2)$$

Wraz z faktem, że $B_n{}'(x)$ =1 (co możemy uzyskać przez przyjęcie z dążącego do zera z obu stron równania), otrzymujemy, że stopień $B_n(x)$ jest równy n i wiodący współczynnik jest jednoznaczny. Używając (23.2), możemy wyznaczyć $B_n(x)$ jeden po drugim, pod warunkiem, że ich stałe warunki są znane.

Definicja. Dla $n \geq 0$, wartości kolejnych wielomianów Bernoulliego $b_n = B_n(0)$ nazywamy *liczbami Bernoulliego*.

Kładąc x = 0 w równości (23.1), otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}. \qquad (23.3)$$

Odtąd używając rozwinięcia Taylora mamy:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{\frac{z^0}{1!} + \frac{z^1}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \cdots}$$

i właśnie ten długi podział możemy wykorzystywać do znajdowania liczb Bernoulliego. Jednakże chcielibyśmy określić b_n i B_n w prostszy oraz bardziej usystematyzowany sposób.

Żeby to osiągnąć, potrzebujemy następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 23.1. Dla każdego $n \geq 1$, mamy:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}\,. \qquad (23.4)$$

Dowód. Porównując współczynniki dla z^n w wyrażeniu

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{ze^{z(x+1)} - ze^{zx}}{e^z - 1} = ze^{zx} = \frac{d}{dx} e^{zx},$$

gdzie $e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!}$, mamy:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = \frac{d}{dx}\, x^n = nx^{n-1}. \ \square$$

Stwierdzenie 23.2. Dla każdego $n \geq 0$, mamy:

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j} \,. \qquad (23.5)$$

Dowód. Niech $F_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j}$. To wystarczy do pokazania, że (1) $F_n(0) = b_n$ dla $n \geq 0$ oraz (2) $F_n{}'(x) = nF_{n-1}(x)$ dla każdego $n \geq 1$, odkąd te dwa warunki jednoznacznie charakteryzują $B_n(x)$.
Pierwszy warunek jest oczywisty.
Jeśli chodzi o drugi warunek, biorąc pod uwagę fakt, że dla $n > j \geq 0$ prawdziwe jest, że $(n-j)\binom{n}{j} = \frac{(n-j)n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j-1)!} = n\binom{n-1}{j}$,
mamy dla $n \geq 1$:
$\frac{d}{dx} F_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j) b_j x^{n-1-j} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_j x^{n-1-j}$,
co kończy dowód. □

Podstawiając $x = 1$ do (23.5) mamy:

$$B_n(1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} b_j + \binom{n}{n} b_n = b_n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} b_j, \text{ gdzie } n \geq 1.$$

Jednak, dla każdego $n \geq 2$, mamy $B_n(1) = b_n$, co wynika z (23.4) dla $x = 0$.

W związku z tym, dla $n \geq 2$ uzyskujemy prawidłowość

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} b_j = 0. \qquad (23.6)$$

Ten wzór pozwala nam obliczać liczby Bernoulliego indukcyjnie.

Kilka pierwszych z nich wygląda następująco:

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{30},\ b_5 = 0,\ b_6 = \frac{1}{42}. \qquad (23.7)$$

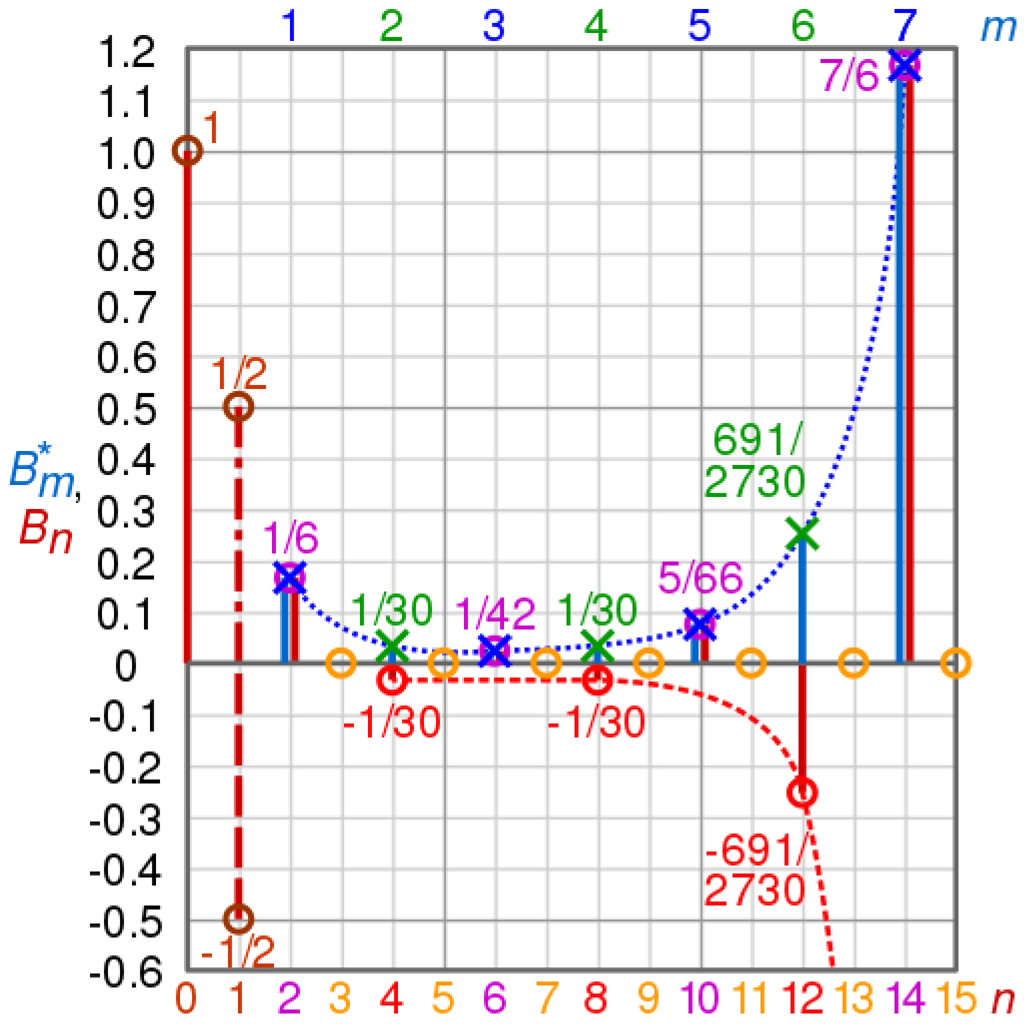
Można pokusić się o zgadnięcie, że $|b_n|$ dąży do zera przy $n \to \infty$. Jednak, jeśli rozważymy następne liczby w tej sekwencji:

$$b_8 = -\frac{1}{30},\ b_{10} = \frac{5}{66},\ b_{12} = -\frac{691}{2730},\ b_{14} = \frac{7}{6},\ b_{16} = -\frac{3617}{510},$$

$$b_{18} = \frac{43867}{798},\ b_{20} = -\frac{174611}{330},\ b_{22} = \frac{854513}{138},\ b_{24} = -\frac{236364091}{2730},$$

możemy zauważyć, że ich wartości ogólnie rosną wraz ze zmianą znaku. Warto także zaznaczyć, że jedyną niezerową liczbą Bernoulliego o nieparzystym indeksie jest b_1.

Tak wygląda graficzna interpretacja kilkunastu pierwszych liczb Bernoulliego oraz ich rozwinięcia dziesiętne:



Liczby Bernoulliego		
n	b_n (ułamek)	b_n (rozwinięcie dziesiętne)
0	1	+1.000000000
1	±1/2	±0.500000000
2	1/6	+0.166666666
3	0	+0.000000000
4	−1/30	−0.033333333
6	1/42	+0.023809523
8	−1/30	−0.033333333
10	5/66	+0.075757575
12	−691/2730	−0.253113553
14	7/6	+1.166666666
16	−3617/510	−7.092156862
18	43867/798	+54.97117794
20	−174611/330	−529.1242424

Inną ważną własnością liczb Bernoulliego jest $b_n = 0$ dla liczb nieparzystych $n \geq 3$ (tzn. $B_{2n+1} = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$). Wynika to z faktu, że funkcja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n - b_1 z = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

jest parzysta, to znaczy $f(-z) = f(z)$.

Współczynnik przy t^n w rozwinięciu w szereg Taylora względem 0 dla dowolnej funkcji $\mathrm{g}(t)$ znika dla każdego nieparzystego n, ponieważ jeśli g jest parzyste, $\mathrm{g}^{\mathrm{n}}(t) = (-1)^n g^n(-t)$ dla każdego n i $\mathrm{g}^{\mathrm{n}}(0) = -\mathrm{g}^{\mathrm{n}}(0)$ dla każdego nieparzystego n.

Kolejna interesująca formuła dotycząca liczb Bernoulliego może być uzyskana przez rozważenie $x = -1$ po obu stronach (23.4) i (23.5), co daje:

$$b_n + n(-1)^n = B_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j (-1)^{n-j},$$

$$\text{lub } n = 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} b_j.$$

Podstawiając $j = j + 1$ oraz n $= n + 1$, otrzymujemy:

$$\sum_{j=2}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{b_{j+1}}{j+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \quad .$$

Stwierdzenie 23.3. Dla każdego $n \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j(x) = nx^{n-1}. \qquad (23.9)$$

Dowód. Dla $n = 1$ równość jest oczywista. Zakładając, że równanie jest prawdziwe dla pewnego $k \geq 1$ i używając (23.2), mamy:

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j(x) = \sum_{j=1}^{k} j \binom{k+1}{j} B_{j-1}(x) = (\mathrm{k}+1) \sum_{j=1}^{k} j \binom{k}{j-1} B_{j-1}(x) =$$

$$=(\mathrm{k}+1) \sum_{j=0}^{k-1} j \binom{k}{j} B_j(x) = (k+1)kx^{k-1} = (k+1)\frac{d}{dx}x^k.$$

lub równoważnie $\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j(x) = (\mathrm{k}+1)\mathrm{x}^{\mathrm{k}} + \mathtt{C}$, dla pewnej stałej $\mathtt{C}$.

Kładąc $\mathrm{x} = 0$ i używając (23.6) można pokazać że $\mathtt{C} = 0$.

W związku z tym, przez indukcję, powyższe stwierdzenie jest prawdziwe dla każdej dodatniej liczby całkowitej. □

Jak wspomnieliśmy wcześniej, dzięki formule (23.6) i wiedzy o liczbach Bernoulliego możemy indukcyjnie ustalić wielomiany Bernoulliego. Tak wyglądają pierwsze z nich:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

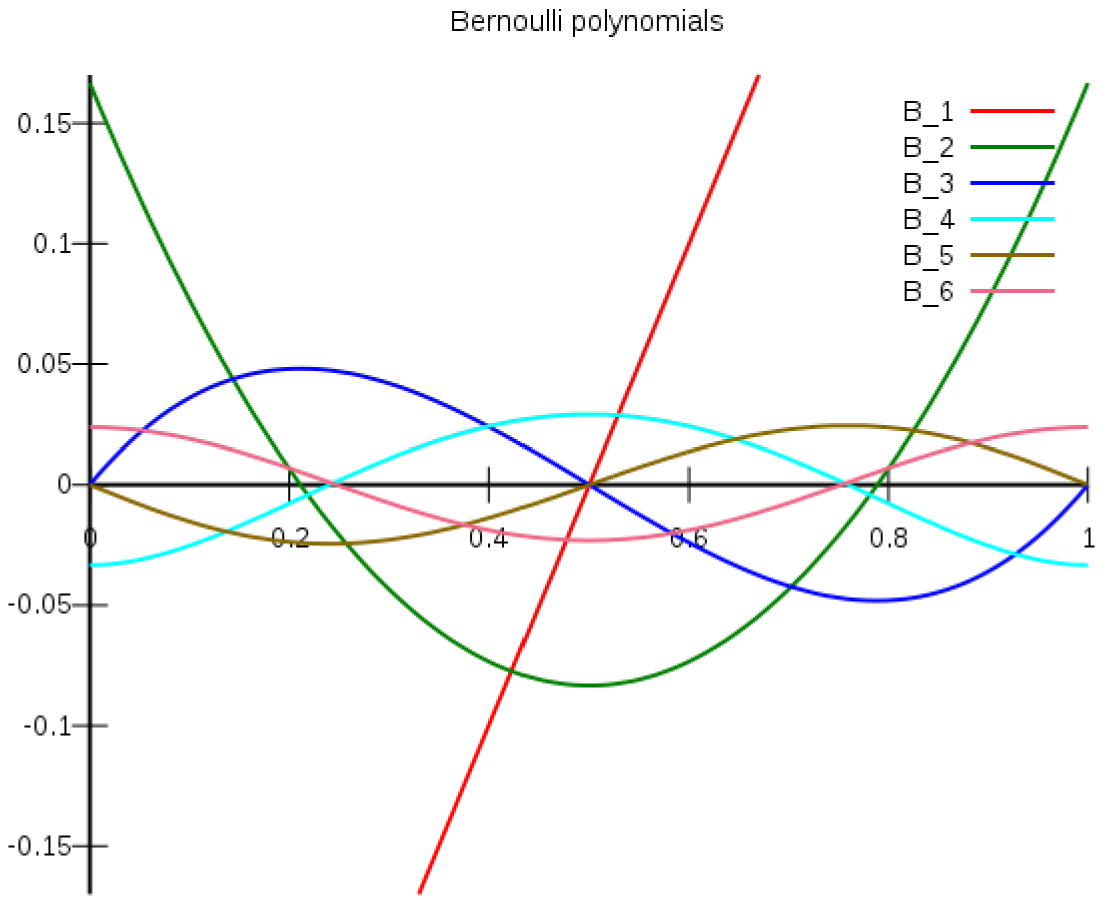
$$B_2(x) = \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = \mathrm{x}^4 - 2\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = \mathrm{x}^5 - \frac{5}{2}\mathrm{x}^4 + \frac{5}{3}\mathrm{x}^3 - \frac{1}{6}\mathrm{x},$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$$



Interpretacja graficzna wielomianów Bernoulliego

Teraz przejdźmy do drugiej części prezentacji. Przyjrzyjmy się relacji między wielomianami Bernoulliego a rachunkiem h-różniczkowym.

Ze Stwierdzenia (23.1) mamy:

$$D_1 B_n(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1},$$

lub równoważnie: $n\int x^{n-1}\, d_1(x) = B_n(x),$ (24.1)

gdzie D_1 jest h-pochodną dla $h = 1$ oraz $\int f(x) d_1(x)$ zatrzymuje się dla h-pochodnej z $h = 1$. Stosując twierdzenie (22.14) fundamentalne dla rachunku h-różniczkowego, mamy dla nieujemnej liczby całkowitej n:

$$a^n + (a+1)^n + \ldots + (b-1)^n = \int_a^b x^n d_1 x = \frac{B_{n+1}(b) - B_{n+1}(a)}{n+1}, \qquad (24.2)$$

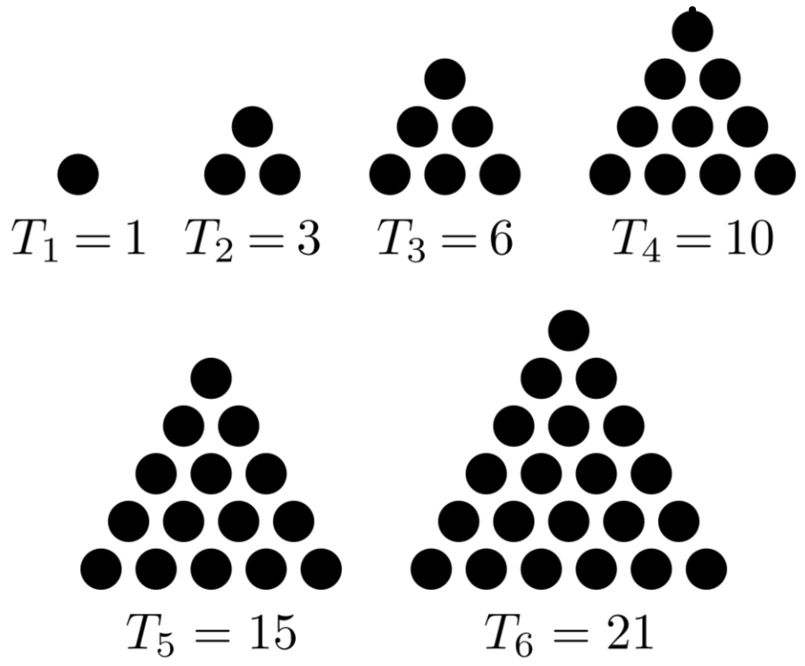
gdzie $a < b$ oraz $\mathrm{b} - a \in \mathrm{Z}$.

Jeśli przepiszemy prawą stronę równania używając (23.5) oraz przyjmiemy $a = 0$, $\mathrm{b} = \mathrm{M} + 1$, mamy:

$$\sum_{k=0}^{M} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (M+1)^{n+1-j} b_j. \qquad (24.3)$$

Kiedy liczby Bernoulliego są już dla nas znane, możemy używając (24.3) łatwo znaleźć wzór na sumę potęg liczb całkowitych.

Dla przykładu, gdy $n = 1$, stosując (24.3) otrzymujemy:
$1 + 2 + 3 + \cdots + M = \sum_{k=1}^{M} k^1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1} \binom{2}{j} (M+1)^{2-j} b_j =$
$= \frac{1}{2}\left((M+1)^2 - (M+1)\right) = \frac{M(M+1)}{2}$
Są to tzw. liczby trójkątne.
Ich graficzna interpretacja dla $M = 1,2, \dots, 6$ została przedstawiona na rysunku obok.
Kolejne liczby trójkątne to:
0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276,300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666...

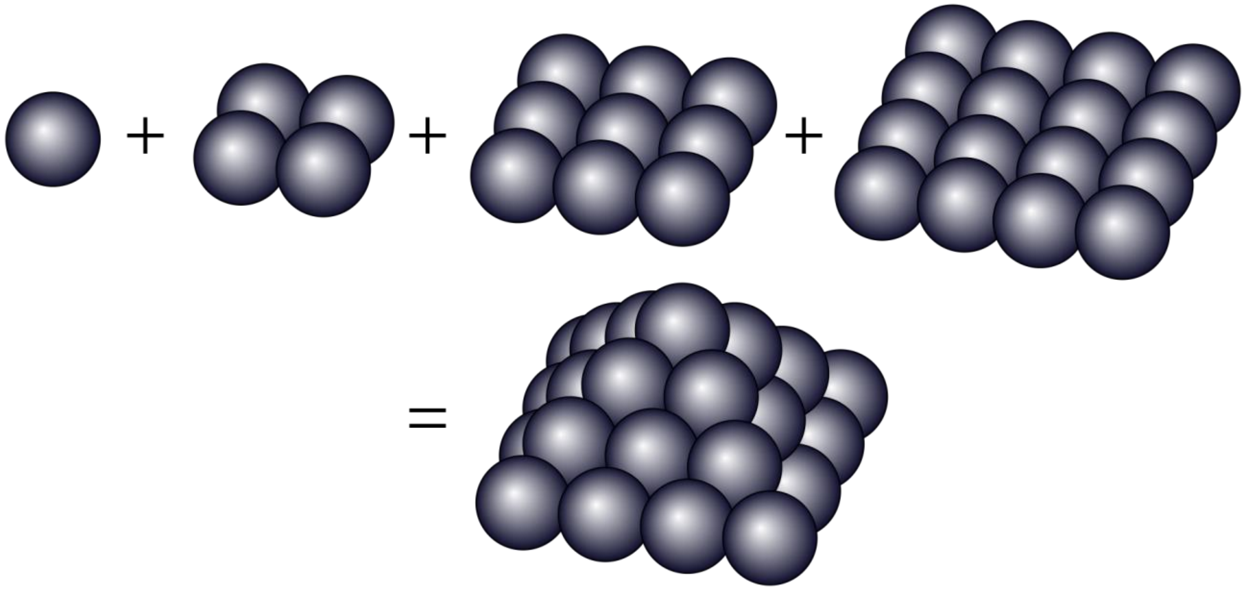


Dla $n = 2$ mamy:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + M^2 = \sum_{k=1}^{M} k^2 = \frac{1}{3}\left((M+1)^3 - \frac{3}{2}(M+1)^2 + \frac{1}{2}(M+1)\right) = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} = \frac{2M^3+3M^2+M}{6}.$$

Nazywamy je kwadratowymi liczbami piramidalnymi.

Tak możemy przedstawić je w sposób graficzny:



Dla $n = 3$ mamy:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + M^3 = \sum_{k=1}^{M} k^3 = \frac{1}{4}\left((M+1)^4 - 2(M+1)^3 + (M+1)^2\right) =$$

$$\left(\frac{M(M+1)}{2}\right)^2 = \frac{M^4+2M^3+M^2}{4}.$$

Dla $n = 4$ mamy:

$$\sum_{k=1}^{M} k^4 = \frac{1}{5}\left((M+1)^5 - \frac{5}{2}(M+1)^4 + \frac{5}{3}(M+1)^3 - \frac{1}{6}(M+1)\right) =$$

$$= \frac{M(2M+1)(M+1)\left(3M^2+3M-1\right)}{30} = \frac{6M^5+15M^4+10M^3-M}{30}.$$

Interesującym zbiegiem okoliczności jest, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej M prawdziwe jest:

$$1^3 + 2^3 + \ \dots + M^3 = (1 + 2 + \ \dots + M)^2 \, .$$

Również (24.3) ujawnia ogólny fakt, że dla $1^n + 2^n + \ \dots + M^n$ jest wielomianem M stopnia $\mathrm{n} + 1$. Ten wielomian, dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, zawiera czynnik $M(M+1)$. Skoro prawa strona równania (24.3) jak łatwo widać znika dla $M = -1$, używając (23.6) mamy, że znika również dla $M = 0$.

Dziękuję za uwagę!