Kamil Kuźnik, 114007

Wzór Eulera-Maclaurina

Przypuśćmy, że $D_h F(x) = f(x)$. Stosując zwykły wzór Taylora mamy, że:

$$F(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x) h^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} \right) F(x)$$

i w związku z tym mamy formalnie, że

$$F(x+h) = e^{hD} F(x) \quad \textbf{(1)}$$

, gdzie $D = \frac{d}{dx}$. A zatem mamy

$$f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{e^{hD} - 1}{h} F(x)$$

lub

$$F(x) = \frac{hD}{e^{hD} - 1} \int f(x) dx \qquad \textbf{(2)}$$

Korzystając z definicji liczb Bernoulliego mamy

$$\frac{hD}{e^{hD}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}(hD)^n \ ,$$

a zatem

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}(hD)^n\int f(x)dx\ .$$

Korzystając z faktu, że $b_n=0$ jeśli n jest nieparzyste i większe od 2, otrzymujemy *wzór Eulera-Maclaurina*

$$F(x)=\int f(x)dx-\frac{h}{2}f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}h^{2n}}{(2n)!}f^{(2n-1)}(x) \quad \textbf{(3)}$$

Przypuśćmy, że $h=1$ i $b-a\in\mathbf{N}$. Korzystając z podstawowego twierdzenia h-różniczkowego mamy, że

$$\sum_{n=a}^{b-1}f(n)=\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\big(f(b)-f(a)\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n)!}\big(f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)\big) \quad \textbf{(4)}$$

Jeśli f spada tak szybko z x tak, że wszystkie jej pochodne osiągają 0 przy $x\to\infty$, to

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = \int_a^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2} f(a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} f^{(2n-1)}(a). \qquad \textbf{(5)}$$

Żeby usprawiedliwić formalne różniczkowanie tych wzorów, rozpatrzmy kilka przypadków. Jeśli $f(x) = x^s$, gdzie s jest dodatnią liczbą całkowitą, to **(4)** staje się

$$\sum_{n=a}^{b-1} n^s = \frac{b^{s+1} - a^{s-1}}{s+1} - \frac{b^s - a^s}{2} + \sum_{m=2}^{s+1} \frac{b_m}{m!} s(s-1)\ldots(s-m+2)\left(b^{s-m+1} - a^{s-m+1}\right) =$$
$$\frac{1}{s+1}\left(x^{s+1} - \frac{s+1}{2} x^s + \sum_{m=2}^{s+1} \binom{s+1}{m} b_m x^{s+1-m} \right)_{x=a}^{x=b}$$

, a to jest równe po prostu $\frac{1}{s+1}\left(B_{s+1}(b) - B_{s+1}(a)\right)$, gdzie $B_{s+1}(x)$ jest wielomianem Bernoulliego.

Jako drugi przypadek, rozpatrzmy **(5)** z $f(x) = e^{-x}$ i $a = 0$. Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-1})^n = \frac{1}{1-e^{-1}}$$

, co zgadza się z prawą stroną:

$$1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{e^{-1} - 1}$$

, gdzie skorzystaliśmy z tego, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}$, $b_n = 0$ dla każdego nieparzystego n większego od 2 i podstawienia $z = -1$. W związku z tym, wzór Eulera-Maclaurina ma więcej niż jedynie formalną wartość, przynajmniej dla funkcji, które szybko maleją w nieskończoności, jak na przykład $f(x) = e^{-x}$.

Dla wzorów **(4)** i **(5)**, chociaż zarówno lewa, jak i prawa strona zawierają sumowania, to te po prawej stronie mogą zbiegać dużo szybciej od tych po lewej. W takim przypadku, te wzory zapewniają skuteczne sposoby na na oszacowanie skończonych i nieskończonych sum. Jednakże musimy być ostrożni z wprowadzaniem tych wzorów dla oszacowania sumy, ponieważ $|b_{2n}|$ rośnie w sposób nieokreślony od n. Rozpatrzmy $f(x) = x^{-2}$. Ponieważ $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot x^{-n-2}$, mamy

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{a^{2n+1}} \qquad \textbf{(6)}$$

Zobaczymy, że szereg po prawej stronie równania zbiega szybko, ale dla wystarczjąco dużego n, $|b_{2n}|$ staje się dominujący nad a^{2n}, a suma częściowa coraz drastyczniej odbija się w górę i w dół. Żeby zobaczyć, jak dobrze pewna suma częściowa przybliża obecną wartość, chcielibyśmy zróżniczkować wzór podobny do **(4)**, ale nieskończoną sumę znajdującą się po prawej stronie równania zastąpimy N-tą sumą częściową s_n zwiększoną o resztę R_N.

Przepiszmy prawą stronę **(4)** jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \left(h^{(k)}(b) - h^{(k)}(a) \right)$$

, gdzie $h(x)=\int f(x)dx$. Przypuśćmy, że $a \in \mathbf{Z}$ i $b=a+1$. Rozważmy N -tą sumę częściową:

$$s_n=\sum_{k=0}^{N}\frac{B_k(0)}{k!}\left(h^{(k)}(a+1)-h^{(k)}(a)\right)$$

, gdzie N jest dodatnią liczbą całkowitą. Jeśli dokonamy podstawienia $g(x)=\frac{B_N(x)}{N!}$, mamy $g^{(N-k)}(x)=\frac{B_k(x)}{k!}$, co wynika z tego, że $B_n^{'}(x)=nB_{n-1}(x)$. Ponieważ $B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}$, to $B_k(1)=B_k(0)$ dla $k \neq 1$ oraz $B_1(1)=B_1(0)+1$. W związku z tym

$$s_N=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{B_k(0)}{k!}h^{(k)}(a+1)-\frac{B_k(1)}{k!}h^{(k)}(a)\right)+h'(a)=$$
$$\sum_{k=0}^{N}\left(g^{(N-k)}(0)h^{(k)}(a+1)-g^{(N-k)}(1)h^{(k)}(a)\right)+h'(a)=$$
$$h'(a)-\sum_{k=0}^{N}g^{(N-k)}(x)h^{(k)}(a+1-x)\Bigg|_{x=0}^{x=1}.$$

Ponieważ funkcja

$$G(x)=\sum_{k=0}^{N}g^{(N-k)}(x)h^{(k)}(a+1-x)$$

ma bardzo prostą pochodną

$$
\begin{aligned}
G'(x) &= \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k+1)}(x) h^{(k)}(a+1-x) \\
&- \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k)}(x) h^{(k+1)}(a+1-x) \\
&= \sum_{k=0}^{N} g^{(N-k+1)}(x) h^{(k)}(a+1-x) \\
&- \sum_{k=1}^{N+1} g^{(N-k+1)}(x) h^{(k)}(a+1-x) \\
&= g^{(N+1)}(x) h(a+1-x) - g(x) h^{(N+1)}(a+1-x) \\
&= -g(x) h^{(N+1)}(a+1-x)
\end{aligned}
$$

, gdzie $g^{(N+1)}(x) = 0$, ponieważ $\deg g = \deg B_N = N$ i mamy

$$
s_N = h'(a) - G(1) + G(0) = h'(a) + \int_0^1 g(x) h^{(N+1)}(a+1-x)dx
$$

Lub

$$
\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)\right) = f(a) + \int_0^1 \frac{B_N(x)}{N!} f^{(N)}(a+1-x)dx
$$

, jeśli oznaczymy $\int f(x)dx$ przez $f^{(-1)}(x)$. Dokonując zamiany zmiennej $x = a+1-t$ w całce, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)\right) \\
&- \int_a^{a+1} \frac{B_N(\{1-t\})}{N!} f^{(N)}(t)dt
\end{aligned}
$$

, gdzie $\{y\}\in[0,1)$ oznacza część ułamkową liczby rzeczywistej y. W rzeczywistości, ponieważ a jest liczbą całkowitą, to dla $a<t<a+1$ mamy $-a<1-t<-a+1$, a zatem $\{1-t\}=a+1-t$. Ostatecznie, jeśli za a podstawimy $a+1, a+2, \ldots, b-1$ i zsumujemy te wszystkie wyrazy, otrzymujemy

$$\sum_{n=a}^{b-1} f(n)=\sum_{k=0}^{N}\frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right)-\int_a^b \frac{B_N(\{1-t\})}{N!}f^{(N)}(t)dt \qquad \textbf{(7)}$$

bądź, z $N=2m+1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b-1} f(n)&=\int_a^b f(t)dt-\frac{1}{2}\left(f(b)-f(a)\right)\\&+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right)\\&-\int_a^b \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!}f^{(2m+1)}(t)dt\end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

, który jest *wzorem Eulera-Maclaurina z resztą.* Jeśli f i jej pochodne znikają w nieskończoności, mamy

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{\infty} f(n)&=\int_a^{\infty} f(t)dt+\frac{1}{2}f(a)-\sum_{k=1}^{m}\frac{b_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(a)\\&-\int_a^{\infty}\frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!}f^{(2m+1)}(t)dt\end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

Z **(7)** wynika, że możemy podstawić $2m+1$ za $2m$ w reszcie **(8)** i **(9)** jeśli $m \geq 1$.

Wzory **(8)** i **(9)** mówią, że błąd przybliżenia sum po lewej stronie przez s_{2m+1} jest zadany przez wyrażenie reszty

$$R_{2m+1} = \int_a^b \frac{B_{2m+1}(\{1-t\})}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(t)dt \quad (b \leq \infty) \qquad \textbf{(10)}$$

By oszacować jej rozmiar, potrzebujemy górnej granicy $B_{2m+1}(x)$ na przedziale $[0,1]$. Z definicji wielomianów Bernoulliego mamy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(a)}{n!} z^n = \frac{ze^{az}}{e^z - 1} \qquad \textbf{(11)}$$

dla każdego $a \in [0,1]$. Wiadomo z analizy zespolonej, że promień zbieżności szeregu potęgowego z funkcji $f(z)$ w otoczeniu $z=0$ jest zadany przez odległość na płaszczyźnie zespolonej z początku układu współrzędnych do najbliższego punktu, gdzie $f(z)$ „wybucha" (Na przykład dobrze wiadomo, że promień zbieżności szeregu geometrycznego $\sum_{n\geq 0} z^n$ jest równy 1, co także wynika z faktu, że ta suma równa się $\frac{1}{1-z}$ wszędzie, gdzie ten szereg zbiega). Tutaj wszystkie punkyy, gdzie $\frac{1}{e^z - 1}$ wybucha są postaci $2\pi n i$, gdzie n jest liczbą całkowitą; a zatem najbliżej od początku układu współrzędnych znajdują się $\pm 2\pi i$. Promień zbieżnośći szeregu **(11)** jest zatem równy 2π.

Z drugiej strony inny fakt z analizy zzespolonej mówi nam, że jeśli R jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum a_n x^n$, to granica górna wartości $(|a_n| R^n)^{1/n} = R|a_n|^{1/n}$ jest równa 1, np. $|a_n|^{1/n}$ jest ostatecznie ograniczona przez $1/R$, ale nie przez żadne mniejsze liczby (można usprawiedliwić ten fakt rozpatrując szereg geometryczny $\sum \alpha^n x^n$, gdzie $R = 1/|\alpha|$). To wszystko oznacza, że jeśli n dąży do ∞, to

$$\left(\frac{|B_n(a)|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{2\pi}$$

lub

$$\frac{|B_n(a)|}{n!} \sim \frac{1}{(2\pi)^n} .$$

A zatem z **(10)** wynika, że wymagana granica $|R_{2m+1}|$ ma rozmiar podobny do

$$\frac{1}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b \left| f^{(2m+1)}(t) \right| dt .$$

Jest ważnym, by zauważyć, że nasza dyskusja na temat rozmiaru $|R_{2m+1}|$ nie jest rygorystyczna. Jednakże powyższy wynik jest prawidłowy, ponieważ wiadomo, że dla $a \in [0,1]$

$$\frac{|B_{2m+1}(a)|}{(2m+1)!} < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \qquad \textbf{(12)}$$

(To przybliżenie można otrzymać rozwijając $B_{2m+1}(x)$ w szereg Fouriera). W związku ztym, mamy

$$\left|R_{2m+1}\right| < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b \left| f^{(2m+1)}(t) \right| dt \qquad \textbf{(13)}$$

Jeśli np. dokonamy w powyższym wzorze podstawień $f(x) = e^{-x}, a = 0, b = \infty$, to mówi on nam, że $\left|R_{2m+1}\right| < \frac{4e^{2\pi}}{(2\pi)^{2m+1}}$ bardzo szybko idzie do 0 i że szereg Eulera-Maclaurina jest zbieżny.

Następnie ponownie rozpatrzmy $f(x) = x^{-2}, b = \infty$. Przypuśćmy, że chcemy oszacować sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \textbf{(14)}$$

i najpierw zrobimy to dodając dużą liczbę wyrażeń, powiedzmy 1000. Ogon sumy może zostać oszacowany przy użyciu całek, mianowicie

$$0{,}001 = \int_{1000}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \sum_{n=1000}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_{999}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 0{,}001001\ldots$$

Widzimy, że nasza pierwsza metoda daje nam dokładny wynik tylko do szóstego miejsca po przecinku. A co, jeśli pójdziemy dalej i użyjemy **(9)** do przybliżenia ogona? Z **(13)** mamy nierówność

$$\left|R_{2m+1}\right| < \frac{4e^{2\pi}(2m+1)!}{1000(2000\pi)^{2m+1}} \,.$$

W szczególności mamy

$$|R_3| < 10^{-10}, |R_5| < 10^{-16}, |R_7| < 10^{-23}.$$

To oznacza, że kilka obliczeń więcej znacznie zwiększa dokładność naszego przybliżenia.

Kuszącym jest stwierdzić, że im więcej obliczeń wykonamy, tym dokładniejsze otrzymamy przybliżenie. Jednakże stosunek

$$\left|\frac{R_{2m+1}}{R_{2m-1}}\right| \sim \frac{2m(2m+1)}{(2000\pi)^2}$$

ostatecznie przekracza 1. Kiedy m jest małe, $|R_{2m+1}|$ szybko się zmniejsza i sumy częściowe wydają się zbiegać do kiedy $m \approx 1000\pi$, wartość $|R_{2m+1}|$ jest zminimalizowana, a poza tym, sumy częściowe zaczynają się coraz żywiej odbijać od obecnej wartości. W ogólności, jeśli ogon zaczyna się od $n = a$, $|R_{2m+1}|$ jest zminimalizowane kiedy $m \approx \pi a$.

Dokładna wartość sumy **(14)** została odkryta przez Eulera i była ona równa $\frac{\pi^2}{6}$. Jest wiele sposobów na udowodnienie tego: jeden z nich wykorzystuje analizę zespoloną, natomiast inny szeregi Fouriera. Obydwa z nich pozwalają również obliczyć dokładną wartość $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, gdzie s jest parzystą liczbą całkowitą: ta suma okazuje się być równa $\frac{(2\pi)^s |b_s|}{2s!}$. Jednakże nie została jeszcze odkryta zbliżona forma tych sum, gdy s jest nieparzyste.

Na koniec rozpatrzmy dwa inne proste przykłady wzoru Eulera-Maclaurina **(8)** z $a = 1, m = 1$.

Przykład 1. $f(x)=\frac{1}{x}$. Wówczas mamy

$$\sum_{n=1}^{b}\frac{1}{n}=\log b+R(b)\text{, gdzie } \lim_{b\to\infty}R(b)=c \quad \textbf{(15)}$$

Liczba c zwana jest stałą Eulera.

Przykład 2. $f(x)=\log x$. Wówczas mamy

$$\log(b-1)!=\int_1^b \log t dt-\frac{1}{2}\log b+R_1(b)\text{, gdzie } \lim_{b\to\infty}R_1(b)=C \qquad \textbf{(16)}$$

Całkując przez części, mamy

$$\int_1^b \log dt=b(\log b-1)\,.$$

A zatem, dodając $\log b$ do obu stron **(16)** otrzymujemy

$$\log b!=\log\sqrt{b}\left(\frac{b}{e}\right)^b+R_1(b)\,.$$

W związku z tym

$$b! \sim e^{C}\sqrt{b}\left(\frac{b}{e}\right)^{b} \quad \text{przy} \quad b \to \infty . \qquad \textbf{(17)}$$

Dodatkowe obliczenia pokazują, że $e^{C} = \sqrt{2\pi}$. Wynik to znany wzór Stirlinga.