UNIWERSYTET KARDYNAŁA STEFANA WYSZYŃSKIEGO
W WARSZAWIE

WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZY
SZKOŁA NAUK ŚCISŁYCH

ROZPRAWA DOKTORSKA

Rozwiązania formalne i analityczne równań moment-różniczkowych cząstkowych

Maria Suwińska
Numer albumu: 3888

Promotor
dr hab. Sławomir Michalik, prof. UKSW

Warszawa 2021

Podziękowania

Składam serdeczne wyrazy wdzięczności mojemu promotorowi, dr. hab. Sławomirowi Michalikowi, prof. UKSW, za opiekę naukową w czasie trwania studiów doktoranckich, wiedzę, którą się w tym czasie ze mną podzielił, wszelkie konsultacje, komentarze i uwagi. Bardzo dziękuję za okazane wsparcie oraz inspirację i motywację do dalszej pracy naukowej. Podziękowania należą się także profesorowi Alberto Lastra z Uniwersytetu w Alcalá de Henares za owocną współpracę.

Dziękuję również władzom i pracownikom Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego. Szkoły Nauk Ścisłych za życzliwość i wszelką pomoc.

Pragnę także podziękować moim Rodzicom i bliskim przyjaciołom za wsparcie, bez którego ta praca na pewno by nie powstała.

Spis treści

Wprowadzenie **1**

1 Notacja i podstawowe definicje **4**

1.1 Funkcje analityczne i szeregi formalne 5

1.2 Sektory i obszary sektorowe 6

2 Operatory powiązane z funkcjami jądrowymi **10**

2.1 Funkcje jądrowe i funkcje momentów 10

2.2 Operatory pochodzące od funkcji jądrowych 14

3 Własności szeregów formalnych **28**

3.1 Rząd Gevreya 28

3.2 Rozwinięcia asymptotyczne funkcji 29

3.3 Sumowalność 36

4 Równania liniowe o współczynnikach zależnych od zmiennej czasowej t **43**

4.1 Diagram Newtona 43

4.2 Normy formalne 45

4.3 Liniowy problem Cauchy'ego o współczynnikach zależnych od zmiennej czasowej 48

5 Równania liniowe o zmiennych współczynnikach **55**

5.1 Zmodyfikowane normy Nagumo 56

5.2 Liniowy problem Cauchy'ego o zmiennych współczynnikach 61

6 Problem sumowalności dla równań o współczynnikach niezależnych od zmiennej czasowej **67**

6.1 Uogólnione równanie przewodnictwa cieplnego 69

6.2 Ogólne równanie liniowe o zmiennych współczynnikach 73

7 Otwarte problemy i dalsze badania **85**

7.1 Problem sumowalności dla równań o współczynnikach zależnych od wszystkich zmiennych 85

7.2 Uogólnienie ciągów momentów 88

7.3 Inne otwarte problemy 89

8 Dodatkowe twierdzenia i własności **91**

Bibliografia **96**

Indeks **99**

Wprowadzenie

Na przestrzeni ostatnich dwóch dekad problem oszacowań Gevreya oraz sumowalności rozwiązań formalnych równań różniczkowych cząstkowych był wielokrotnie podejmowany. W [3] analizie zostało poddane liniowe równanie o stałych współczynnikach. Równanie przewodnictwa cieplnego oraz jego uogólnienia są przedmiotem rozważań w [2] oraz [18]. Badania były dalej rozszerzane na coraz ogólniejsze równania liniowe o współczynnikach zależnych zarówno od zmiennej czasowej t jak w [25], jak i od wszystkich zmiennych w [19]. Wyniki te były dalej uogólniane także ze standardowych problemów Cauchy'ego na zagadnienia typu Cauchy'ego-Goursata w [16] i [20] oraz na równania nieliniowe w [23] i [24]. W każdym ze wspomnianych przypadków za bazę służyła teoria szeregów formalnych i sumowalności zebrane w monografiach [1] i [9], w szczególności uogólnione operatory Borela i Laplace'a oraz ich własności, a do uzyskania poszukiwanych wyników wykorzystywano zdefiniowane specyficznie dla każdego przypadku normy. W przypadku poszukiwania oszacowań Gevreya dla rozwiązań równań liniowych analizowany był diagram Newtona, którego związek z rzędem Gevreya rozwiązania formalnego został zaprezentowany w [28] (więcej szczegółów w Rozdziale 4).

Kolejnym kierunkiem, w którym podążyły badania, jest uogólnienie wcześniej wspomnianych wyników na równania moment-różniczkowe. Pojęcie operatora moment-różniczkowego

$$\partial_{m,z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{m(n)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{m(n)} z^n,$$

gdzie $(m(n))_{n\geq 0}$ jest pewnym ustalonym ciągiem momentów, pojawiło się po raz pierwszy w [3] (Definicja 2.12) i jest ściśle związane z funkcjami jądrowymi oraz funkcjami momentów (Definicja 2.2). Operator ten pozwala poszerzyć rozważaną klasę równań między innymi o równania q-różnicowo-różniczkowe, które były już badane pod kątem sumowalności rozwiązań w [26], oraz równania zawierające pochodną ułamkową Caputo. Przedmiotem dotychczasowych badań były liniowe równania moment-różniczkowe o stałych współczynnikach w [10] oraz o współczynnikach zależnych wyłącznie od zmiennej czasowej w [13, 22]. Pojawiły się także dalsze uogólnienia samego operatora moment-różniczkowego szerzej omawiane w Rozdziale 7. W [7] i [8] omawiany jest problem sumowalności, a wyniki wspomnianych rozważań można wyrazić także w języku moment-różniczkowania w sensie definicji z [3]. Główne wyniki zaprezentowane w niniejszej pracy pochodzą z [13], [22], [7] i [8].

Rozprawa doktorska została podzielona na osiem rozdziałów. Rozdział 1 zawiera podstawowe definicje i własności dotyczące funkcji analitycznych, szeregów formalnych oraz sektorów i obszarów sektorowych na powierzchni Riemanna logarytmu. W Rozdziale 2 wprowadzone zostały pojęcia funkcji jądrowych i funkcji momentów. Oba te pojęcia stanowią bazę dla bardziej ogólnych odpowiedników operatorów Laplace'a i Borela oraz różniczkowania.

Następnie w Rozdziale 3 szczegółowo omówione zostały własności szeregów formalnych niezbędne do dalszych rozważań. W szczególności zdefiniowane zostały takie pojęcia jak rząd Gevreya szeregu i rozwinięcia asymptotyczne. Zaprezentowany został także dowód Lematu Watsona, istotnego wyniku mówiącego o jednoznaczności rozwinięcia asymptotycznego określonego rzędu Gevreya funkcji holomorficznej na pewnym obszarze. Ostatni podrozdział poświęcony jest problemowi sumowalności szeregów formalnych.

W kolejnych dwóch rozdziałach przedstawione zostały wyniki dotyczące rzędu Gevreya rozwiązań formalnych liniowych równań różniczkowych cząstkowych otrzymane i opublikowane odpowiednio w [13] oraz [22]. W Rozdziale 4 analizie podlega problem postaci

$$\begin{cases} P(\partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1}, \ldots, \partial_{m_N,z_N})u(t,z) = f(t,z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \partial^j_{m_0,t}u(0,z) = \varphi_j(z) \text{ dla } 0 \le j < M \end{cases},$$

gdzie $P(\partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1}, \ldots, \partial_{m_N,z_N})$ jest liniowym operatorem o współczynnikach zależnych wyłączne od zmiennej t, a $\partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1}, \ldots, \partial_{m_N,z_N}$ oznaczają operatory moment-różniczkowe. W pierwszym podrozdziale zdefiniowany został diagram Newtona. Omawiamy też jego związek z rzędem Gevreya rozwiązania formalnego dowolnego równania liniowego. Następnie definiujemy normy formalne i szczegółowo omawiamy ich własności. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 4.1. W Rozdziale 5 omawiany jest nieco bardziej złożony, choć wciąż analogicznie skonstruowany problem, którego współczynniki są zależne zarówno od zmiennej t, jak i od $z \in \mathbb{C}^N$. W tym celu korzystamy ze zdefiniowanych w tym rozdziale zmodyfikowanych norm Nagumo oraz, ponownie, z własności diagramu Newtona. Główny rezultat zawiera Twierdzenie 5.1.

Rozdział 6 poświęcony jest problemowi sumowalności rozwiązań formalnych równań liniowych o współczynnikach zależnych wyłącznie od zmiennej $z \in \mathbb{C}^N$. Zaprezentowane w nim rezultaty są szczególnym przypadkiem wyników z [7] oraz [8]. W pierwszym podrozdziale omawiamy problem dla uogólnionego równania przewodnictwa cieplnego, a następnie przechodzimy do ogólniejszej klasy operatorów liniowych. Najważniejsze wyniki zaprezentowane zostały w Twierdzeniach 6.1, 6.2 i 6.3.

Otwarte problemy oraz możliwe kierunki dalszych badań zostały przedstawione w Rozdziale 7. Ostatni rozdział zawiera kilka technicznych twierdzeń i lematów wykorzystywanych w treści pracy, które w celu poprawienia czytelności tekstu nie pojawiają się w jej głównej części.

ROZDZIAŁ 1

Notacja i podstawowe definicje

Niniejszy rozdział został oparty w znacznej mierze na [1] i ma na celu usystematyzowanie podstawowych pojęć wykorzystanych w dalszej części pracy. W kolejnych podrozdziałach zaprezentowane zostały definicje sektorów i obszarów sektorowych wraz z ich najważniejszymi własnościami, charakterystyka pierścienia szeregów formalnych oraz ważniejsze pojęcia dotyczące funkcji analitycznych definiowanych na sektorach.

W dalszej części pracy przyjmujemy, że $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich oraz $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Rozważmy przestrzeń $\mathbb{C}^N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$. Wówczas dla dowolnego $R > 0$ zbiór

$$D_R = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : \ |z_j| < R \text{ dla } j = 1, \ldots, N \right\}$$

nazywamy *polidyskiem otwartym o promieniu* R.

Należy zauważyć, że tak zdefiniowany zbiór jest otwarty w $\mathbb{C}^N$. Analogicznie definiujemy polidysk domknięty $\bar{D}_R$, zmieniając jedynie nierówność na nieostrą.

W przypadku, gdy długość promienia polidysku nie jest istotna, wykorzystywane będzie skrócone oznaczenie D. Podobną konwencję przyjmujemy dla domkniętego polidysku.

Niech A oznacza dowolną stałą rzeczywistą. Niech ponadto $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$ będą wielowskaźnikami z $\mathbb{N}_0^N$. Wówczas będziemy korzystać z następujących oznaczeń:

- sumę wielowskaźników $\alpha + \beta$ będziemy rozumieć jako

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_N + \beta_N),$$

- przez $\alpha \cdot \beta = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \beta_j$ oznaczamy iloczyn skalarny wielowskaźników,
- nierówność $\alpha \leq \beta$ oznaczać będzie zależność $\alpha_j \leq \beta_j$ dla $j = 1, \ldots, N$,
- długość wielowskaźnika α definiujemy jako $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$,
- przez iloczyn $A\alpha$ rozumiemy $(A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_N)$.

Ponadto będziemy korzystać z notacji

$$z^s = z_1^{s_1} z_2^{s_2} \dots z_N^{s_N},$$

gdzie $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ jest wektorem w $\mathbb{C}^N$, a $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ wektorem w $\mathbb{R}^N$.

1.1 Funkcje analityczne i szeregi formalne

Niech $G \subset \mathbb{C}^N$, gdzie $N \in \mathbb{N}$ będzie dowolnym otwartym podzbiorem $\mathbb{C}^N$. Niech $\mathbb{E}$ oznacza dowolną przestrzeń Banacha, a $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ normę w tej przestrzeni. Wówczas zbiór wszystkich funkcji przyjmujących wartości z $\mathbb{E}$ i holomorficznych na G będziemy oznaczać przez $\mathcal{O}(G, \mathbb{E})$. W przypadku, gdy $\mathbb{E}$ jest przestrzenią liczb zespolonych z normą euklidesową, stosowane będzie uproszczone oznaczenie $\mathcal{O}(G)$.

DEFINICJA 1.1 *Przestrzenią szeregów formalnych o współczynnikach* z $\mathbb{E}$ nazywamy zbiór

$$\mathbb{E}[[t]] = \left\{ \hat{u} : \ \hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n, \ u_n \in \mathbb{E} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Tak zdefiniowane elementy $\mathbb{E}[[t]]$ nie muszą być szeregami zbieżnymi. W szczególności możemy rozpatrywać nawet szeregi formalne, które są rozbieżne w każdym punkcie z wyjątkiem $t_0 = 0$. Jeżeli jednak szereg formalny $\hat{u}$ jest zbieżny, jego suma oznaczana będzie przez u.

UWAGA 1.1 $\mathbb{E}[[t]]$ z działaniami dodawania i mnożenia szeregów danymi jako

- $\hat{u}(t) + \hat{v}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) t^n$,
- $\hat{u}(t) * \hat{v}(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right) t^n$

jest pierścieniem przemiennym. Istotnie, tak zdefiniowane działania są w oczywisty sposób przemienne i łączne, prawdziwe są także prawa rozdzielności. Elementem neutralnym dodawania jest $\hat{u}_0 \equiv 0$ – szereg o współczynnikach równych zerowemu elementowi przestrzeni $\mathbb{E}$.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się w szczególności do przypadku, gdy $\mathbb{E}$ jest przestrzenią funkcji ciągłych na domkniętym polidysku $D_R \subset \mathbb{C}^N$ dla pewnych $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$ i holomorficznych w jego wnętrzu ze standardową normą supremum.

W dalszej części niniejszej pracy istotną rolę gra również pojęcie majoranty szeregu formalnego o wyrazach rzeczywistych lub zespolonych, którego definicja została przytoczona poniżej.

DEFINICJA 1.2 Niech $\hat{u} = \sum_{n=0}^{N} u_n t^n$ i $\hat{v} = \sum_{n=0}^{N} v_n t^n$ będą szeregami formalnymi z $\mathbb{C}[[t]]$. Wówczas $\hat{v}$ nazywamy *majorantą* szeregu $\hat{u}$, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ prawdziwa jest nierówność $|u_n| \leq v_n$.

1.2 Sektory i obszary sektorowe

Niech $\mathcal{R}$ oznacza powierzchnię Riemanna logarytmu.

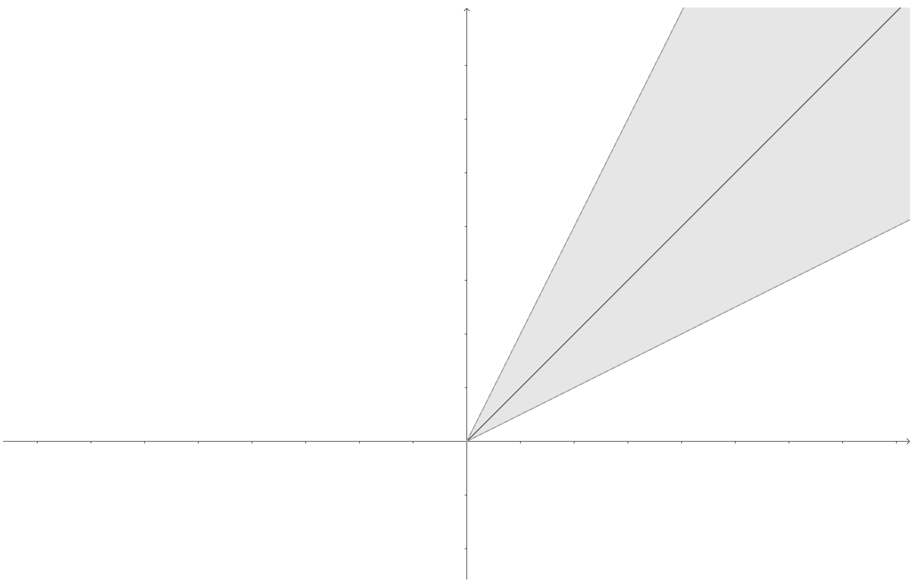
DEFINICJA 1.3 Ustalmy $d \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ i $R > 0$. *Sektorem otwartym w kierunku d o kącie rozwarcia α i promieniu R* nazywamy zbiór

$$S_d(\alpha, R) = \left\{ z \in \mathcal{R} :\ 0 < |z| < R,\ d - \frac{\alpha}{2} < \arg z < d + \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Analogicznie definiujemy *sektor domknięty* jako

$$\bar{S}_d(\alpha, R) = \left\{ z \in \mathcal{R} :\ 0 < |z| \leq R,\ d - \frac{\alpha}{2} \leq \arg z \leq d + \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Gdy $R = +\infty$, będziemy korzystać z notacji skróconej $S_d(\alpha)$ (analogicznie $\bar{S}_d(\alpha)$ dla sektorów domkniętych). Podobnie, gdy kąt rozwarcia sektora nie jest istotny, oznaczenie przyjmuje formę S_d (analogicznie $\bar{S}_d$).



RYSUNEK 1.1 Sektor $S_d(\alpha)$ dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$ z zaznaczonym kierunkiem $d = \frac{\pi}{4}$.

Poglądowy przykład sektora o nieskończonym promieniu przedstawia Rysunek 1.1.

UWAGA 1.2 Zarówno w przypadku sektora domkniętego, jak i otwartego punkt $z_0 = 0$ nie jest elementem sektora. W szczególności oznacza to, że dla żadnego d, α i R zbiór $\bar{S}_d(\alpha, R)$ nie jest zbiorem domkniętym w $\mathcal{R}$ ze standardową topologią.

W teorii sumowalności istotną rolę odgrywają także obszary sektorowe.

DEFINICJA 1.4 Niech $G \subset \mathcal{R}$ będzie otwartym i spójnym podzbiorem powierzchni Riemanna logarytmu. Wówczas nazwiemy G *obszarem sektorowym*, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- $G \subset S_d(\alpha)$ dla pewnych $d \in \mathbb{R}$ i $\alpha > 0$,
- dla każdego $0 < \beta < \alpha$ istnieje $r > 0$ takie, że $\bar{S}_d(\beta, r) \subset G$.

Jak w przypadku sektorów, nazywamy wówczas d *kierunkiem obszaru* G, a α jego *kątem rozwarcia* i korzystamy z oznaczenia $G_d(\alpha)$.

Zauważmy, że, w przeciwieństwie do sektorów, obszary sektorowe nie są jednoznacznie wyznaczone przez kierunek i kąt rozwarcia. Ponadto sam fakt, że $S_d(\alpha)$ jest sektorem nieograniczonym, nie wymusza nieograniczoności $G_d(\alpha)$, gdyż w szczególności wszystkie punkty z z tego zbioru mogą spełniać warunek $|z| \leq \rho$ dla pewnego $\rho > 0$.

Kolejne definicje pozwolą na opisanie zachowania w punkcie 0 funkcji holomorficznych zdefiniowanych na dowolnym obszarze sektorowym $G_d(\alpha)$[1].

Na potrzeby kolejnych definicji przyjmijmy, że f jest funkcją zdefiniowaną na obszarze sektorowym $G = G_d(\alpha)$ o wartościach z pewnej przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$.

DEFINICJA 1.5 Powiemy, że f jest *ograniczona w zerze*, gdy dla każdego sektora $\bar{S} \subset G$ istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\sup_{z \in \bar{S}} \|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C.$$

DEFINICJA 1.6 Funkcja f jest *ciągła w zerze*, gdy istnieje $f(0) \in \mathbb{E}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $\bar{S} \subset G$ istnieje $r > 0$, dla którego $\|f(z) - f(0)\|_{\mathbb{E}} < \varepsilon$ dla każdego $z \in \bar{S} \cap D_r$.

DEFINICJA 1.7 Funkcja f jest *różniczkowalna w zerze*, gdy funkcja $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$ jest ciągła w zerze. Wówczas $g(0)$ nazywamy pochodną funkcji f w zerze i oznaczamy przez $f'(0)$. Analogicznie definiujemy pochodne kolejnych rzędów w zerze.

STWIERDZENIE 1.1 *Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest ciągła w zerze.*

Dowód: Załóżmy, że $f'(z)$ jest ciągła w zerze. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ i $\bar{S} \subset G$ możemy dobrać $r > 0$, dla którego $\|f'(z) - f'(0)\| < \varepsilon$ dla $z \in \bar{S} \cap D_r$. Zauważmy następującą zależność:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} - f'(0) = \frac{1}{z} \int_0^z (f'(w) - f'(0))\, du.$$

[1]Wszystkie poniższe definicje zostały zaczerpnięte z [1, Rozdziały 4 i 5].

Stąd

$$\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}-f'(0)\right\|_{\mathbb{E}} \leq |z|^{-1}\left\|\int_0^z (f'(w)-f'(0))\,du\right\|_{\mathbb{E}} < |z|^{-1}\varepsilon(|z|-0)=\varepsilon.$$

Aby wykazać implikację w drugą stronę, zapiszmy na początek $f(z)$ w następującej postaci:

$$f(z)=f(0)+g(z)z=f(0)+f'(0)z+(g(z)-f'(0))z$$

i wprowadźmy oznaczenie $h(z)=g(z)-f'(0)$. Ponieważ z założenia funkcja $g(z)$ jest ciągła w zerze i $g(z)\to f'(0)$ dla $z\to 0$, również $h(z)$ jest ciągła w zerze i $h(z)\to f'(0)-f'(0)=0$ dla $z\to 0$.

Ustalmy dowolne $\varepsilon>0$. Wówczas dla pewnego sektora $\bar{S}\subset G$ istnieje $r>0$ takie, że $\|h(z)\|\leq\varepsilon$ dla każdego $z\in\bar{S}\cap D_r$. Niech $0<\rho<r$. Ze wzoru całkowego Cauchy'ego otrzymujemy dla krzywej γ będącej okręgiem $|w-z|=\rho$:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(0)+f'(0)w+h(w)w}{(w-z)^2}\,dw=$$
$$=f'(0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(w)w}{(w-z)^2}\,dw.$$

Położenie krzywej całkowania γ względem zbiorów $\bar{S}$ i D_r ilustruje Rysunek 1.2.

Zauważmy także, że $|w|\leq r+\rho=C\rho$ dla pewnej stałej $C>0$. Wobec tego dla $z\in\bar{S}\cap D_r$ otrzymujemy:

$$\|f'(z)-f'(0)\|_{\mathbb{E}}=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_\gamma \frac{h(w)w}{(w-z)^2}\,dw\right\|_{\mathbb{E}}\leq C\rho^2\varepsilon\rho^{-2}=C\varepsilon.$$

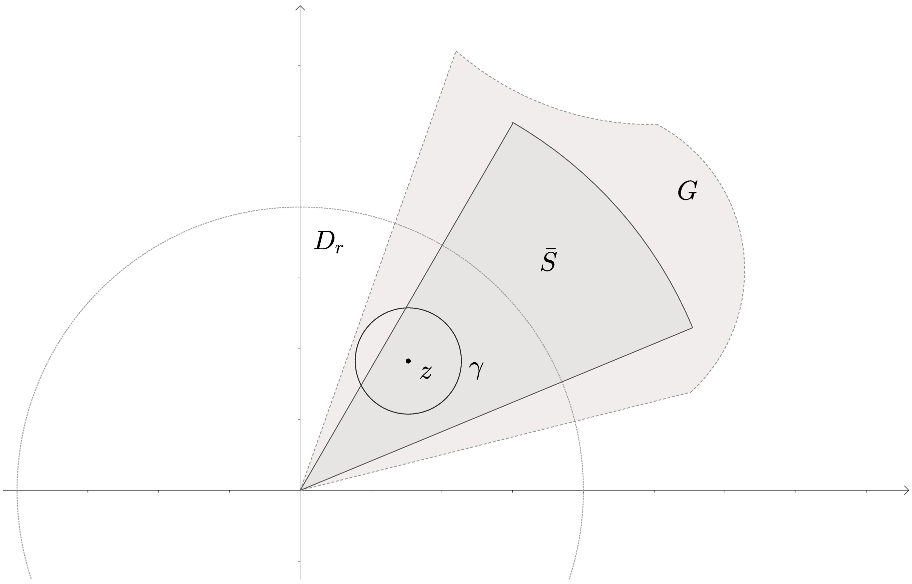
■

Istotną klasę funkcji stanowią funkcje o wykładniczym tempie wzrostu.

DEFINICJA 1.8 Niech $S_d(\alpha)$ oznacza sektor o nieskończonym promieniu. Ponadto niech $f\in\mathcal{O}(S_d(\alpha),\mathbb{E})$. Dodatkowo ustalmy $k>0$. Wówczas mówimy, że f *ma w* $S_d(\alpha)$ *wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż* k *przy* $z\to\infty$, gdy dla dowolnego $0<\beta<\alpha$ istnieją stałe dodatnie $C_1,\ C_2$ takie, że

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}}\leq C_1\exp\left(C_2|z|^k\right)\ \text{dla każdego } z\in S_d(\beta). \tag{1.1}$$

Przestrzeń wszystkich funkcji spełniających te założenia będziemy oznaczać przez $\mathcal{O}^k(S_d(\alpha))$.



RYSUNEK 1.2

Poniżej przytoczony został jeden z ważniejszych przykładów funkcji o wykładniczym tempie wzrostu.

PRZYKŁAD 1.1 Dla dowolnego $s > 0$ funkcję zadaną za pomocą szeregu postaci

$$\mathbf{E}_s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+sn)},$$

gdzie $\Gamma(u)$ oznacza funkcję Gamma Eulera, nazywamy *funkcją Mittaga-Lefflera o indeksie* s. Jest to funkcja całkowita o wykładniczym tempie wzrostu nie większym niż s^{-1} na dowolnym sektorze o nieskończonym promieniu[2].

[2]Por. [1, Rozdział 4.2].

ROZDZIAŁ 2

Operatory powiązane z funkcjami jądrowymi

Ten rozdział poświęcony jest funkcjom jądrowym i ich własnościom. Omówione zostaną także operatory liniowe pochodzące od tych funkcji – operator m-różniczkowy oraz m-transformaty Laplace'a i Borela. Większość definicji oraz własności przytoczona jest za [1] oraz [3]. Zdefiniowane w dalszej części rozdziału regularne funkcje momentów pojawiły się po raz pierwszy w [13].

2.1 Funkcje jądrowe i funkcje momentów

DEFINICJA 2.1 Powiemy, że funkcja f zdefiniowana na pewnym sektorze $S_d(\alpha)$ jest *całkowalna w zerze*, gdy dla dowolnego $x > 0$ i θ spełniającego $|d - \theta| < \frac{\alpha}{2}$ istnieje całka

$$\int_0^x |f(we^{i\theta})| \, dw.$$

DEFINICJA 2.2 Parę funkcji $e,\ E$ nazywamy *funkcjami jądrowymi*[1] *rzędu* $k > \frac{1}{2}$, jeśli:

1) $e \in \mathcal{O}\left(S_0(\frac{\pi}{k})\right)$, $z^{-1}e(z)$ jest całkowalna w zerze, $e(x) \in \mathbb{R}_+$ dla $x \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją stałe $A, B > 0$, dla których $|e(z)| \leq Ae^{-(|z|/B)^k}$ dla $z \in S_0(\frac{\pi}{k} - \varepsilon)$,
2) $E \in \mathcal{O}^k(\mathbb{C})$ oraz $z^{-1}E(z^{-1})$ jest całkowalna w zerze na $S_\pi(2\pi - \frac{\pi}{k})$,
3) funkcje e i E są od siebie uzależnione poprzez *związaną funkcję momentów* m *rzędu* $\frac{1}{k}$ zadaną za pomocą wzoru

$$m(u) := \int_0^\infty x^{u-1}e(x) \, dx$$

dla wszystkich u spełniających $\operatorname{Re} u \geq 0$. Wówczas funkcja jądrowa E ma rozwinięcie

[1] Porównaj [1, Podrozdział 5.5]

w szereg potęgowy postaci

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n)} \text{ dla } z \in \mathbb{C},$$

4) $m(0) = 1$

Zauważmy, że funkcja $E(z)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez $e(z)$.

DEFINICJA 2.3 Niech $e(z),\ E(z)$ będą parą funkcji jądrowych i niech $m(u)$ będzie związaną z nimi funkcją momentów rzędu s. Wówczas ciąg $(m(n))_{n\geq 0}$ nazywamy *ciągiem momentów rzędu* s.

STWIERDZENIE 2.1 *Niech* γ *będzie krzywą idącą od nieskończoności wzdłuż prostej* $\arg z = -\pi$ *do punktu* $(0, -1)$*, następnie po okręgu jednostkowym o środku w zerze i znów do nieskończoności wzdłuż* $\arg z = \pi$*. Niech* $e(z),\ E(z)$ *spełniają warunki z Definicji 2.2 i niech* $s \in (0, 2k)$*. Wówczas funkcje* $e(z,s) = \frac{1}{s} e(z^{\frac{1}{s}})$ *oraz* $E(z,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{E(w)w^{s-1}}{w^s - z}\,dw$ *są funkcjami jądrowymi rzędu* $s^{-1}k$

Dowód: Zauważmy, że skoro $e(z)$ jest holomorficzna na $S_0(\frac{\pi}{k})$, to $e(z,s)$ jest holomorficzna na $S_0(\frac{\pi}{sk})$.

Zaczniemy od wyznaczenia funkcji $m(u,s)$, która byłaby funkcją momentów związaną z $e(z,s)$:

$$m(u,s) = \int_0^\infty x^{u-1} e(x,s)\,dx = s^{-1}\int_0^\infty x^{u-1} e(x^{\frac{1}{s}})\,dx.$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych $x = t^s$ otrzymujemy $m(u,s) = m(su)$ dla dowolnego u. Pozostaje wykazać, że

$$E(z,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(sn)},$$

co wynika bezpośrednio z zależności[2]

$$\frac{1}{m(u)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E(w) w^{-u-1}\,dw. \tag{2.1}$$

■

Zauważmy, że dla $k \leq \frac{1}{2}$ nie jest możliwe poprawne zdefiniowanie sektora $S_\pi(2\pi - \frac{\pi}{k})$. Wobec tego dla takich wartości k niezbędne okazuje się sformułowanie osobnej definicji funkcji jądrowych oraz związanych z nimi funkcji momentów.

DEFINICJA 2.4 Dla dowolnego $k > 0$ definiujemy *funkcję jądrową* e_m *rzędu* k, jeśli istnieje taka

[2]Jest to uogólnienie tzw. formuły Hankela dla funkcji Gamma. Dowód został przedstawiony w Uwadze 2.5.

liczba $n \in \mathbb{N}$, dla której $nk > \frac{1}{2}$ oraz funkcje jądrowe $e_{\tilde{m}}$ i $E_{\tilde{m}}$ rzędu nk spełniające warunek:

$$e_m(z) = \frac{e_{\tilde{m}}(z^{\frac{1}{n}})}{n}.$$

Wówczas zarówno funkcja jądrowa E_m rzędu k, jak i związana z nią funkcja momentów m rzędu $\frac{1}{k}$ są zdefiniowane za pomocą tych samych zależności, które zostały wyszczególnione w Definicji 2.2[3].

Zauważmy, że poprawność takiej definicji znajduje swoje uzasadnienie w Stwierdzeniu 2.1.

Poniższy przykład przedstawia klasyczne i najważniejsze funkcje jądrowe rzędu $k > 0$ oraz związaną z nimi funkcję momentów. Są one wykorzystywane w klasycznej teorii k-sumowalności.

PRZYKŁAD 2.1

- $e_m(z) = kz^k e^{-z^k}$;
- $m(u) = \Gamma(1 + \frac{u}{k})$,
- $E_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(1 + \frac{j}{k})} = \mathbf{E}_{1/k}(z)$.

Definicja funkcji momentów może również zostać rozszerzona na rzędy ujemne[4], ale zagadnienie to pomijamy, gdyż nie będzie ono wykorzystywane w dalszej części niniejszej pracy.

Zbiór wszystkich funkcji momentów dodatnich rzędów jest zamknięty ze względu na mnożenie.

STWIERDZENIE 2.2 *Niech m_1 i m_2 będą funkcjami momentów dodatnich rzędów odpowiednio s_1 i s_2. Wówczas $m_1 \cdot m_2$ jest funkcją momentów rzędu $s_1 + s_2$. Jeśli ponadto $s_1 > s_2$, to $\frac{m_1}{m_2}$ jest funkcją momentów rzędu $s_1 - s_2$*[5].

Szkic dowodu tego faktu został zaprezentowany w [1]. Analogiczny fakt w nieco ogólniejszym kontekście ciągów silnie regularnych (por. Rozdział 7) wykazano także w [5]. Zamiast funkcji jądrowych autorzy rozpatrują jednak pary funkcji e, E, dla których założenia całkowalności w zerze z Definicji 2.2 zostały zastąpione silniejszymi warunkami dotyczącymi ich ograniczoności. Przy zachowaniu oznaczeń z Definicji 2.2 prezentują się one następująco:

a) istnieje $\alpha > 0$ takie, że dla każdego kierunku $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}\right)$ istnieją stałe $C, r > 0$ spełniające

$$|e(z)| \leq C|z|^\alpha \text{ dla każdego } z \in \tilde{S}_\theta \subset S_0\left(\frac{\pi}{k}\right), \ |z| < r, \tag{2.2}$$

b) istnieje $\beta > 0$ takie, że dla każdego kierunku $\theta \in \left(\frac{\pi}{2k}, 2\pi - \frac{\pi}{2k}\right)$ istnieją stałe $K, R > 0$

[3] Porównaj: [1, Podrozdział 5.6]
[4] Porównaj [14, Definicja 4].
[5] Przytoczone za [1, Twierdzenia 31 i 32]

spełniające

$$|E(z)| \leq K|z|^{-\beta} \text{ dla każdego } z \in \tilde{S}_\theta \subset S_\pi\left(2\pi - \frac{\pi}{k}\right), \ |z| > R. \tag{2.3}$$

Tak skonstruowaną klasę funkcji autorzy [5] określili mianem *silnych funkcji jądrowych*. Wartym podkreślenia jest fakt, że funkcje jądrowe z Przykładu 2.1 wykorzystywane w klasycznej teorii sumowalności spełniają powyższe założenia[6]. Również w częściach niniejszej pracy traktujących o sumowalności szeregów formalnych wykorzystywane będą właśnie wspomniane silniejsze założenia.

Zauważmy, że na podstawie Stwierdzenia 2.2 można z łatwością zdefiniować także funkcję momentów rzędu 0.

DEFINICJA 2.5 Funkcję m nazywamy *funkcją momentów rzędu* 0, gdy istnieją funkcje momentów m_1 i m_2 tego samego rzędu s spełniające zależność $m = \frac{m_1}{m_2}$.

Niezwykle istotny jest fakt, że wszystkie funkcje momentów ustalonego rzędu s mają takie samo tempo wzrostu co funkcja $\Gamma_s(x) := \Gamma(1+sx)$[7]. Mówiąc dokładniej, istnieją stałe dodatnie a i A spełniające warunek

$$a^n\Gamma_s(n) \leq m(n) \leq A^n\Gamma_s(n) \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

W dalszej części rozdziału będziemy także rozważać pewną szczególną klasę funkcji momentów, która zdefiniowana została po raz pierwszy w [13]. Klasa ta była wykorzystywana także w [22].

DEFINICJA 2.6 Dla dowolnego $s > 0$ powiemy, że m jest *regularną funkcją momentów rzędu* s, gdy jest funkcją momentów rzędu s oraz istnieją stałe $a, A > 0$ takie, że

$$a(n+1)^s \leq \frac{m(n+1)}{m(n)} \leq A(n+1)^s \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5}$$

Zbiór wszystkich regularnych funkcji momentów rzędu s będziemy oznaczać przez $\mathcal{M}_s$.

LEMAT 2.1 *Regularne funkcje momentów mają następujące własności:*

1) *Weźmy $m_1 \in \mathcal{M}_{s_1}$ i $m_2 \in \mathcal{M}_{s_2}$. Wówczas funkcja $m_1 \cdot m_2$ jest regularną funkcją momentów rzędu $s_1 + s_2$, a więc $m_1 \cdot m_2 \in \mathcal{M}_{s_1+s_2}$. Jeśli dodatkowo założymy, że $s_1 > s_2$, to $\frac{m_1}{m_2} \in \mathbb{M}_{s_1-s_2}$.*
2) *Dla dowolnego $s > 0$ funkcja Γ_s jest regularną funkcją momentów rzędu s.*

[6]Porównaj: [5, Rozdział 4].
[7]Porównaj: [1, Podrozdział 5.5].

Dowód: Z definicji regularnych funkcji momentów istnieją stałe dodatnie a_1, A_1, a_2, A_2, dla których:

$$a_i(n+1)^{s_i} \leq \frac{m_i(n+1)}{m_i(n)} \leq A_i(n+1)^{s_i} \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

dla $i = 1, 2$. Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas

$$a_1 a_2 (n+1)^{s_1+s_2} \leq \frac{m_1(n+1)m_2(n+1)}{m_1(n)m_2(n)} \leq A_1 A_2 (n+1)^{s_1+s_2}.$$

Ze Stwierdzenia 2.2 wynika, że $m_1 \cdot m_2$ jest funkcją momentów rzędu $s_1 + s_2$. Analogicznie możemy udowodnić, że $\frac{m_1}{m_2}$ jest regularną funkcją momentów rzędu $s_1 - s_2$ dla $s_2 < s_1$.

Możemy zatem przejść do dowodu podpunktu 2). Do jego przeprowadzenia wykorzystamy wzór Stirlinga[8]:

$$\sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \leq \Gamma(x) \leq \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12x}} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} < \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+1} \text{ dla każdego } x \geq 1. \tag{2.6}$$

Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy wówczas następujące ograniczenie:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+ns)}{\Gamma(1+ns-s)} &\leq e^{-s+1} \left(\frac{1+ns}{1+ns-s} \right)^{1+ns-s-\frac{1}{2}} (1+ns)^s \leq \\ &\leq e^{-s+1} \left(1 + \frac{s}{1+ns-s} \right)^{1+ns-s} \sqrt{\frac{1+ns-s}{1+ns}} \left(1 + \frac{1}{s} \right)^s s^s n^s \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{s} \right)^s e s^s n^s. \end{aligned}$$

Analogicznie możemy oszacować to samo wyrażenie z dołu:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+ns)}{\Gamma(1+ns-s)} &\geq e^{-s-1} \left(\frac{1+ns}{1+ns-s} \right)^{ns-s+\frac{1}{2}} (1+ns)^s \geq \\ &\geq e^{-s-1} s^s n^s. \end{aligned}$$

■

2.2 Operatory pochodzące od funkcji jądrowych

Korzystając ze zdefiniowanych w poprzednim podrozdziale funkcji jądrowych oraz związanej z nimi funkcji momentów, możemy zdefiniować operatory całkowe będące odpowiednikami operatorów Laplace'a oraz Borela. W tym celu rozważmy na początek sektor $S = S_d(\alpha)$

[8]Patrz: [27]

o nieskończonym promieniu, parę funkcji jądrowych $e(z),\ E(z)$ rzędu $k > \frac{1}{2}$ i związaną z nimi funkcję momentów m oraz funkcję $f \in \mathcal{O}^k(S, \mathbb{E})$.

DEFINICJA 2.7 Niech $S = S_d(\alpha)$. Dla dowolnego kierunku θ spełniającego $|d-\theta| < \frac{\alpha}{2}$ operator całkowy zdefiniowany za pomocą wzoru

$$(\mathcal{L}_{e,d}f)(z) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) f(u)\frac{du}{u} \tag{2.7}$$

nazywamy *m-transformatą Laplace'a*.

Zauważmy, że dla θ z dowolnego domkniętego przedziału zawartego w $\left(d - \frac{\alpha}{2},\, d + \frac{\alpha}{2}\right)$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego $z \in S_\theta(\frac{\pi}{k} - \varepsilon, r)$, całka z (2.7) jest zbieżna bezwzględnie i lokalnie jednostajnie. Stąd wynika, że jeśli weźmiemy dwa różne kierunki $\theta_1,\ \theta_2$ z domkniętego podprzedziału $\left(d - \frac{\alpha}{2},\, d + \frac{\alpha}{2}\right)$, gdzie $\theta_1 < \theta_2$, to z twierdzenia całkowego Cauchy'ego wynika, że całki w obu tych kierunkach są sobie równe. Dokładniej, jeśli weźmiemy sektor $S = S_{(\theta_1+\theta_2)/2}(\theta_2 - \theta_1)$ oraz dowolny dysk D_R, to

$$\int_{\partial(S\cap D_R)} e\left(\frac{u}{z}\right) f(u)\frac{du}{u} = 0.$$

Zauważmy, że całka po łuku zawartym w ∂D_R jest zbieżna dla dowolnego $R > 0$ i dąży do zera przy $R \to +\infty$. Ostatecznie przy $R \to +\infty$ otrzymujemy równość:

$$\int_0^{e^{i\theta_1}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) f(u)\frac{du}{u} = \int_0^{e^{i\theta_2}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) f(u)\frac{du}{u}.$$

Stąd wnioskujemy, że kierunek θ możemy wybrać dowolny, bliski d.

Z powyższego w szczególności wynika również następujące stwierdzenie:

STWIERDZENIE 2.3 *Funkcja $\mathcal{L}_{e,d}f(z)$ jest holomorficzna na obszarze sektorowym $G_d\left(\alpha + \frac{\pi}{k}\right)$.*

UWAGA 2.1 Definicja 2.7 pozostaje bez zmian również w przypadku $k \leq \frac{1}{2}$[9].

Aby zdefiniować odpowiednik transformaty Borela powiązany z parą funkcji jądrowych $e,\ E$, rozważmy na początek obszar sektorowy $G_d(\alpha)$ o kącie rozwarcia $\alpha > \frac{\pi}{k}$. Dobieramy wartości $\theta \in \left(d - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2k},\, d + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2k}\right)$ i $\varepsilon,\ r > 0$ w taki sposób, aby sektor $S_\theta(\frac{\varepsilon+\pi}{k}, r)$ zawierał się w całości w $G_d(\alpha)$. Wówczas ujemnie zorientowaną krzywą będącą brzegiem sektora $S_\theta(\frac{\varepsilon+\pi}{k}, r)$ oznaczmy przez $\gamma_k(\theta)$.

Na początek zdefiniujemy m-transformatę Borela dla $k > \frac{1}{2}$:

DEFINICJA 2.8 Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(G, \mathbb{E})$ ciągłej w zerze i $u \in S_\theta\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$ operator postaci

[9] Por. [1, Rozdział 5.5]

$$(\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k(\theta)} E\left(\frac{u}{z}\right) f(z)\frac{dz}{z} \tag{2.8}$$

nazwiemy m-*transformatą Borela*.

Tak zdefiniowany operator jest niezależny od wyboru ε i θ, co wynika z twierdzenia Cauchy'ego.

UWAGA 2.2 Zauważmy, że dla funkcji jądrowych z Przykładu 2.1 operatory $\mathcal{L}_{e,d}$ oraz $\mathcal{B}_{e,d}$ są tożsame ze standardowymi transformatami Laplace'a i Borela.

STWIERDZENIE 2.4 *Niech* $f(u) = u^{\lambda}$ *dla pewnego* $\lambda \in \mathbb{C}$ *takiego, że* $\operatorname{Re}\lambda > 0$. *Wówczas* $(\mathcal{L}_{e,d}f)(z) = m(\lambda)z^{\lambda}$ *dla dowolnych* $d \in \mathbb{R}$ *i funkcji jądrowej* $e(z)$.

Dowód: Zauważmy, że tak zdefiniowana funkcja f jest ciągła w zerze. Ustalmy funkcję jądrową $e(z)$ i $d \in \mathbb{R}$. Dla dowolnego θ bliskiego d mamy zatem:

$$(\mathcal{L}_{e,d}f)(z) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) u^{\lambda-1}\, du.$$

Po dokonaniu podstawienia $w = uz^{-1}$ otrzymujemy więc:

$$(\mathcal{L}_{e,d}f)(z) = \int_0^{e^{i(\theta-\arg z)}\infty} e(w)w^{\lambda-1}z^{\lambda}\, dw = z^{\lambda}m(\lambda).$$

■

Stwierdzenie to może posłużyć do zdefiniowania formalnej m-transformaty Laplace'a:

DEFINICJA 2.9 Niech $\hat{f}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u^n$ będzie szeregiem formalnym. Wówczas definiujemy *formalną m-transformatę Laplace'a* następująco:

$$(\hat{\mathcal{L}}_{m,z}\hat{f})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n m(n) z^n.$$

UWAGA 2.3 Nawet w przypadku, gdy $\hat{f}(z)$ jest zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej, nie implikuje to zbieżności szeregu $\hat{\mathcal{L}}_{m,z}\hat{f}(z)$[10].

UWAGA 2.4 Przy dodatkowym założeniu, że szereg $\hat{f}$ jest zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej i jego suma f ma wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k, wiemy, że istnieje $\rho > 0$ takie, że dla $|z| < \rho$ szereg $\hat{\mathcal{L}}_{m,z}\hat{f}(z)$ jest zbieżny oraz

$$(\mathcal{L}_{e,d}f)(z) = \hat{\mathcal{L}}_{m,z}\hat{f}(z).$$

[10] Por. [1, Rozdział 5.5].

STWIERDZENIE 2.5 *Niech $z \neq 0,\ w \neq 0$. Wówczas dla dostatecznie małych wartości $\left|\frac{z}{w}\right|$ prawdziwa jest zależność*

$$\frac{w}{w-z} = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) E\left(\frac{u}{w}\right) \frac{du}{u} \tag{2.9}$$

w przypadku, gdy obie strony tej równości są dobrze zdefiniowane.

Dowód: Korzystając z faktu, że funkcja $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n)}$ jest całkowita, otrzymujemy następujące przekształcenie prawej strony (2.9):

$$\int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) E\left(\frac{u}{w}\right) \frac{du}{u} = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{m(n)w^n} \frac{du}{u}.$$

Po wykonaniu zamiany zmiennych $t = \frac{u}{z}$ oraz skorzystaniu z Uwagi 2.4 otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n)w^n} \int_0^{e^{i(\theta-\arg z)}\infty} e(t)t^{n-1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} = \frac{w}{w-z}.$$

■

STWIERDZENIE 2.6 *Operator $\mathcal{L}_{e,d}$ jest różnowartościowy i $\mathcal{B}_{e,d}$ jest jego odwrotnością.*

Dowód: Niech $G = G_d(\alpha)$ będzie ustalonym obszarem sektorowym o kącie rozwarcia $\alpha > \frac{\pi}{k}$ i niech funkcja $f \in \mathcal{O}(G)$ będzie ciągła w zerze. Rozważmy $g = (\mathcal{L}_{e,d} \circ \mathcal{B}_{e,d})f$. Wówczas:

$$\begin{aligned} g(z) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\theta)} E\left(\frac{u}{w}\right) \frac{f(w)}{u\, w}\, dw\, du = \\ = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\theta)} \frac{f(w)}{w} \left(\int_0^{e^{i\theta}\infty} e\left(\frac{u}{z}\right) E\left(\frac{u}{w}\right) \frac{du}{u} \right) dw. \end{aligned}$$

Ze Stwierdzenia 2.5 oraz wzoru całkowego Cauchy'ego otrzymujemy

$$g(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\theta)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z).$$

■

STWIERDZENIE 2.7 *Niech $f(z) = z^\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$, gdzie $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Wówczas*

$$(\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = u^\lambda \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma E(w) w^{-\lambda-1}\, dw,$$

gdzie γ oznacza krzywą całkowania od nieskończoności wzdłuż półprostej $\arg z = -\pi$, potem po okręgu jednostkowym i z powrotem do nieskończoności wzdłuż półprostej $\arg z = \pi$.

Dowód: Z definicji m-transformaty Borela:

$$(\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_k(\theta)} E\left(\frac{u}{z}\right) z^{\lambda-1}\,dz.$$

Po zamianie zmiennych $w = \frac{u}{z}$ otrzymujemy

$$(\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_k(\theta)} E(w)\frac{u^\lambda}{w^\lambda}\cdot\frac{dw}{-w} = \frac{u^\lambda}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_k(\theta)} E(w)w^{-\lambda-1}\,dw,$$

gdzie $\tilde{\gamma}_k(\theta)$ to krzywa całkowania idąca od nieskończoności wzdłuż półprostej $\arg u - \tau - \frac{\pi+\varepsilon}{2k}$, następnie przeciwnie do ruchu wskazówek zegara po łuku okręgu o środku w zerze i promieniu $|u|r^{-1}$, po czym z powrotem do nieskończoności wzdłuż półprostej $\arg u - \tau + \frac{\pi+\varepsilon}{2k}$. Ponieważ jedyną osobliwością funkcji podcałkowej jest $w_0 = 0$, można krzywą $\tilde{\gamma}_k(\theta)$ zastąpić γ opisaną w tezie. ■

UWAGA 2.5 Ze Stwierdzeń 2.6 i 2.7 wynika, że

$$\frac{1}{m(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E(w)w^{-\lambda-1}\,dw \text{ dla } \lambda\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Istotnie, jeżeli oznaczymy $C = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E(w)w^{-\lambda-1}\,dw$, otrzymana w Stwierdzeniu 2.7 zależność przybiera formę

$$\mathcal{B}_{e,d}(z^\lambda) = Cu^\lambda.$$

Po przyłożeniu do obu stron odpowiedniej m-transformaty Laplace'a otrzymujemy zgodnie z wynikiem ze Stwierdzenia 2.6:

$$z^\lambda = Cm(\lambda)z^\lambda.$$

DEFINICJA 2.10 Niech m będzie funkcją momentów rzędu s. Wówczas *formalną m-transformatą Borela* nazywamy operator $\hat{\mathcal{B}}_{m,z}\colon \mathbb{E}[[z]] \to \mathbb{E}[[z]]$ postaci:

$$\hat{\mathcal{B}}_{m,z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}z^n.$$

Ponownie rozważmy funkcje jądrowe $e(z),\ E(z)$ rzędu k, obszar sektorowy G o kącie rozwarcia α większym niż $\frac{\pi}{k}$, funkcję $f\in\mathcal{O}(G,\mathbb{E})$ ciągłą w zerze oraz funkcje $e(z,\alpha),\ E(z,\alpha)$ zdefiniowane jak w Stwierdzeniu 2.1. Wówczas zachodzi następująca zależność:

STWIERDZENIE 2.8 *Przy założeniach przytoczonych powyżej prawdziwa jest równość:*

$$(\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = \frac{-\alpha}{2\pi i}\int_{\gamma_k(\theta)} E\left(\frac{u^\alpha}{z^\alpha},\alpha\right) f(z)\frac{dz}{z}. \tag{2.10}$$

Dowód: Oznaczmy prawą stronę równości (2.10) przez $g(u)$. Korzystając z Lematu 8.5 otrzymujemy następującą zależność

$$g(u) - (\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = \frac{-\alpha}{2\pi i}\int_{\gamma_k(\theta)} \tilde{E}\left(\frac{u^\alpha}{z^\alpha},\alpha\right) f(z)\frac{dz}{z},$$

przy czym funkcja $\tilde{E}(w)$ jest ograniczona dla $w \to \infty$. Zauważmy, że po dokonaniu podstawienia $w := \frac{u^\alpha}{z^\alpha}$ i przy odpowiedniej deformacji krzywej całkowania otrzymujemy z twierdzenia Cauchy'ego równość:

$$g(u) - (\mathcal{B}_{e,d}f)(u) \equiv 0,$$

co kończy dowód. ■

Dotychczasowe rozważania na temat m-transformaty Borela dotyczyły wyłącznie przypadku $k > \frac{1}{2}$. Dla $0 < k \leq \frac{1}{2}$ definicja tego operatora musi zostać nieco zmodyfikowana. Powodem takiej sytuacji jest, jak w przypadku funkcji jądrowych mniejszych rzędów, niemożność poprawnego zdefiniowania obszaru sektorowego $G_d(\alpha)$ dla $\alpha > \frac{\pi}{k}$.

Zgodnie z Definicją 2.4 dla $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ możemy ustalić $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\tilde{k} = nk > \frac{1}{2}$. Możemy wówczas skorzystać z funkcji jądrowych $\tilde{e},\ \tilde{E}$ rzędu $\tilde{k}$ w celu zdefiniowania odpowiednich funkcji jądrowych $e,\ E$ rzędu k. Rozważmy funkcję $f \in \mathcal{O}^k(S)$ dla pewnego sektora S. Łatwo zauważyć, że wówczas funkcja $\tilde{f}(z) = f(z^n)$ należy do $\mathcal{O}^{\tilde{k}}(\tilde{S})$ dla pewnego sektora $\tilde{S}$. Istotnie, jeśli $\|f(z)\| \leq C_1 \exp\left(C_2|z|^k\right)$, to również $\|f(z^n)\| \leq C_1 \exp\left(C_2|z|^{\tilde{k}}\right)$ dla z takich, że $f(z^n)$ jest poprawnie zdefiniowane. Zauważmy ponadto, że $(\mathcal{L}_{\tilde{e},d}\tilde{f})(z) = (\mathcal{L}_{e,nd}f)(z^n)$. Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\tilde{e},d}\tilde{f})(z) = \int_0^{e^{i\theta}\infty} \tilde{e}\left(\frac{u}{z}\right)\tilde{f}(u)\frac{du}{u} &= \int_0^{e^{i\theta}\infty} ne\left(\frac{u^n}{z^n}\right) f(u^n)\frac{du}{u} = \\ &= \int_0^{e^{in\theta}\infty} e\left(\frac{w}{z^n}\right) f(w)\frac{dw}{w} = (\mathcal{L}_{e,nd}f)(z^n).\end{aligned}$$

Korzystając z tych faktów możemy zdefiniować m-transformatę Borela dla $0 < k \leq \frac{1}{2}$:

DEFINICJA 2.11 Niech $e,\ E$ oznaczają parę funkcji jądrowych rzędu $0 < k \leq \frac{1}{2}$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ oraz α takie, że $2\pi \geq n \geq \alpha > \frac{\pi}{k}$. Niech ponadto $\tilde{e},\ \tilde{E}$ będą funkcjami jądrowymi rzędu $\tilde{k} = nk$. Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(G_d(\alpha), \mathbb{E})$ ciągłej w zerze definiujemy m-

transformatę Borela następująco:

$$(\mathcal{B}_{e,d}f)(u) = \frac{-1}{2n\pi i}\int_{\gamma_k(\theta)} \tilde{E}\left(\frac{u^{\frac{1}{n}}}{z^{\frac{1}{n}}}\right) f(z)\frac{dz}{z}.$$

Zauważmy, że w powyższej definicji nie ma znaczenia dobór n i α. Wynika to bezpośrednio ze Stwierdzenia 2.8.

Innym bardzo istotnym operatorem pochodzącym od funkcji jądrowych jest m-operator różniczkowy.

DEFINICJA 2.12 Niech $(m(n))_{n\geq 0}$ oznacza pewien ciąg momentów. *Operatorem m-różniczkowym*[11] nazywamy operator $\partial_{m,z}\colon \mathbb{E}[[z]] \to \mathbb{E}[[z]]$ postaci:

$$\partial_{m,z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}z^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{m(n)}z^n.$$

Analogicznie definiujemy operator odwrotny.

DEFINICJA 2.13 Niech $(m(n))_{n\geq 0}$ oznacza pewien ciąg momentów. *Operatorem m-całkowym* nazywamy operator $\partial_{m,t}^{-1}\colon \mathbb{E}[[z]] \to \mathbb{E}[[z]]$ postaci:

$$\partial_{m,z}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}z^n\right) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n-1}}{m(n)}z^n.$$

m-operator różniczkowy możemy również przedstawić za pomocą całki z funkcji jądrowych.

STWIERDZENIE 2.9 *Niech $f \in \mathcal{O}(D_r, \mathbb{E})$ dla pewnego dysku o środku w zerze i promieniu $r > 0$. Załóżmy ponadto, że m jest funkcją momentów rzędu $\frac{1}{k}$ związaną z funkcjami jądrowymi $e(z)$ i $E(z)$ rzędu k. Wówczas dla każdego $|z| < \varepsilon < r$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$ mamy*

$$\partial_{m,z}^n f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon} f(w)\int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta)\frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\,d\zeta\,dw, \tag{2.11}$$

gdzie $\theta \in \left(-\arg w - \frac{\pi}{2k}, -\arg w + \frac{\pi}{2k}\right)$[12].

Dowód: Zauważmy, że skoro funkcja $f(z)$ jest holomorficzna na D_r, możemy zapisać ją w postaci zbieżnego szeregu potęgowego

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_n z^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^j.$$

[11] Porównaj: [3, Rozdział 2]
[12] Porównaj [10, Proposition 3]

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy ponadto

$$\partial^n_{m,z} f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\frac{f^{(j+n)}(0)}{(j+n)!} m(j+n)}{m(j)} z^j,$$

a zatem $\partial^j_{m,z} f(0) = \frac{f^{(j)}(0)}{j!} m(j)$ dla każdego $j \in \mathbb{N}_0$. Korzystając z ostatniej zależności oraz wzoru całkowego Cauchy'ego, otrzymujemy:

$$\partial^j_{m,z} f(0) = \frac{m(j)}{j!} \cdot \frac{j!}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(w)}{w^{j+1}} \, dw.$$

Przypomnijmy, że

$$m(j) = \int_0^\infty x^{j-1} e(x) \, dx$$

dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$. Wobec tego

$$\partial^j_{m,z} f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(w)}{w^{j+1}} \int_0^\infty x^{j-1} e(x) \, dx \, dw,$$

co po dokonaniu podstawienia $x := w\zeta$ daje

$$\begin{aligned} \partial^j_{m,z} f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(w)}{w} \int_0^{e^{-i \arg w}\infty} \zeta^{j-1} e(w\zeta) \, d\zeta \, dw = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} f(w) \int_0^{e^{-i \arg w}\infty} \zeta^j \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \, d\zeta \, dw. \end{aligned}$$

Ze względu na podstawowe własności $e(z)$ możemy zastąpić $\theta = -\arg w$ dowolnym θ z przedziału $\left(-\arg w - \frac{\pi}{2k}, -\arg w + \frac{\pi}{2k}\right)$.

Wówczas dla $z \in D_\varepsilon$ otrzymujemy:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^j_{m,z} f(0)}{m(j)} z^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^j \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{m(j)} \, d\zeta \, dw.$$

Ponieważ $E(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{m(j)}$, formuła przybiera postać

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} E(z\zeta) \, d\zeta \, dw.$$

Pozostaje zauważyć, że $\partial^n_{m,z} E(z\zeta) = \zeta^n E(z\zeta)$, co prowadzi do wyniku

$$\partial^n_{m,z} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \zeta^n E(z\zeta) \, d\zeta \, dw.$$

$\blacksquare$

UWAGA 2.6 Stwierdzenie 2.9 może zostać rozszerzone na funkcje $f \in \mathcal{O}^k(S_d(\alpha) \cup D_r, \mathbb{E})$ dla dowolnych $k > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $r > 0$. Dokładniej, jeśli $f \in \mathcal{O}^k(S_d(\alpha) \cup D_r, \mathbb{E})$, to dla pewnego $0 < \tilde{r} < r$ oraz dowolnych $0 < \beta < \alpha$, $n \in \mathbb{N}_0$ i $z \in S_d(\beta) \cup D_{\tilde{r}}$ mamy

$$\partial^n_{m,z} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \, d\zeta \, dw, \tag{2.12}$$

gdzie $\theta \in \left(-\arg w - \frac{\pi}{2k}, -\arg w + \frac{\pi}{2k}\right)$, a γ oznacza brzeg zbioru postaci $S_d(\beta_0) \cup D_\varepsilon$ dla pewnego $\beta < \beta_0 < \alpha$ i $\tilde{r} < \varepsilon < r$[13].

Korzystając ze Stwierdzenia 2.9 i Uwagi 2.6 możemy wykazać następujące twierdzenie charakteryzujące funkcje o wykładniczym tempie wzrostu:

TWIERDZENIE 2.1 *Rozważmy parę silnych funkcji jądrowych $e(z)$, $E(z)$ oraz związaną z nimi funkcję momentów $m(u)$. Niech $(m(n))_{n\geq 0}$ oznacza ciąg momentów i niech $d \in \mathbb{R}$ oraz $\alpha, k, r > 0$ będą ustalone. Rozważmy funkcję $f \in \mathcal{O}^k(S_d(\alpha) \cup D_r, \mathbb{E})$. Wówczas istnieje takie $0 < \tilde{r} < r$, że dla dowolnych $0 < \beta < \alpha$, $z \in S_d(\beta) \cup D_{\tilde{r}}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ istnieją stałe dodatnie A, B, C spełniające nierówność*

$$\|\partial^n_{m,z} f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq AB^n m(n) e^{C|z|^k} \quad \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N}_0, \; z \in S_d(\beta) \cup D_{\tilde{r}}. \tag{2.13}$$

Dowód: Z Uwagi 2.6

$$\partial^n_{m,z} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(z)} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \, d\zeta \, dw \tag{2.14}$$

dla pewnego $\theta \in \left(-\arg w - \frac{\pi}{2k}, -\arg w + \frac{\pi}{2k}\right)$ i krzywej γ zależnej od z. Rozważmy na początek całkę

$$\int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \, d\zeta$$

dla pewnego θ jak wyżej, z z otoczenia zera i w spełniającego $|w| = \varepsilon$ dla $\varepsilon > 0$ zależnego od z. Skorzystamy z podstawienia $(0, \infty) \ni s \mapsto se^{i\theta}$, gdzie $\zeta = se^{i\theta}$. Stąd i z definicji funkcji jądrowych e, E otrzymujemy

$$\left| \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta} \, d\zeta \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty s^{n-1} |E(zse^{i\theta})||e(wse^{i\theta})| \, ds \leq$$
$$\leq \frac{C_1 C_3}{\varepsilon} \int_0^\infty s^{n-1} \exp\left(C_2 s^k |z|^k - \frac{\varepsilon^k s^k}{C_4^k}\right) ds$$

[13] Porównaj [7, Twierdzenie 3]

dla pewnych stałych $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 > 0$.

Niech $|z| \leq \tilde{r} = \frac{\varepsilon}{(2C_2)^{\frac{1}{k}}C_4}$. Wówczas $\exp\left(C_2 s^k|z|^k - \frac{\varepsilon^k s^k}{C_4^k}\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^k s^k}{2C_4^k}\right)$ oraz

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta)\frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\,d\zeta\right| &\leq \frac{C_1C_3}{\varepsilon}\int_0^\infty s^{n-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon^k s^k}{2C_4^k}\right)\,ds = \\ &= \frac{C_1C_3 2^{\frac{n}{k}}C_4^n}{\varepsilon^{n+1}k}\int_0^\infty \xi^{\frac{n}{k}-1}\exp\left(-\xi\right)\,d\xi = \\ &= \frac{C_1C_3 2^{\frac{n}{k}}C_4^n}{\varepsilon^{n+1}k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Z Lematu 8.1 oraz własności (2.4) otrzymujemy zatem oszacowanie

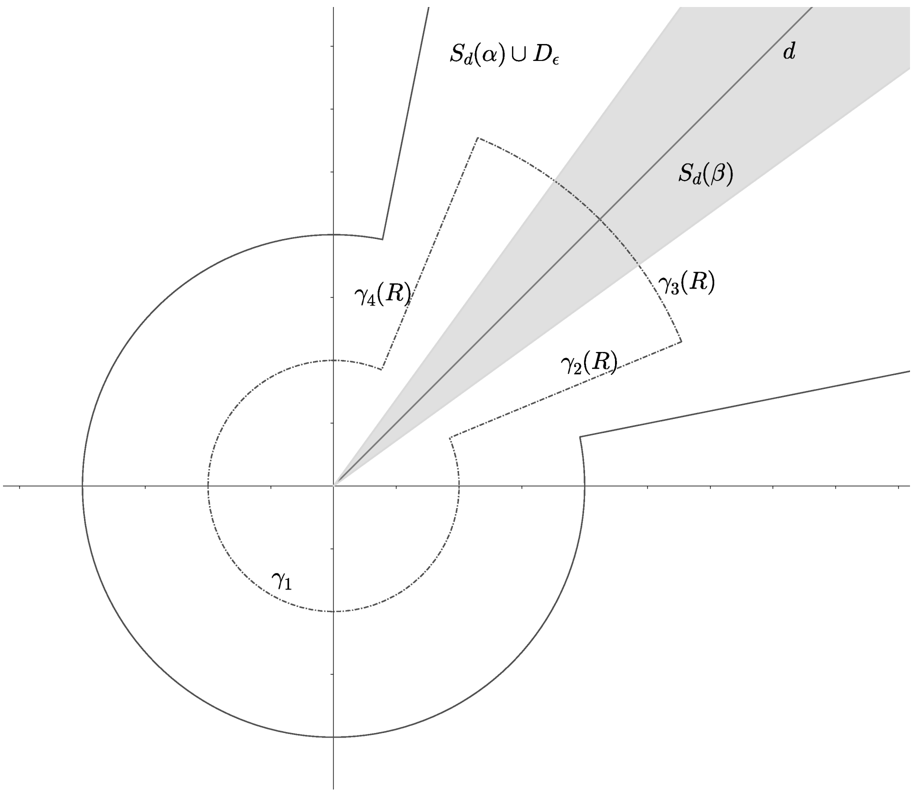
$$\left|\int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta)\frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\,d\zeta\right| \leq A_0 B_0^n m(n) \tag{2.16}$$

oraz

$$\|\partial_{m,z}^n f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq \sup_{|w|=\varepsilon}\|f(w)\|_{\mathbb{E}} A_0 B_0^n m(n) \leq \tilde{A}_0\tilde{B}_0^n m(n) e^{C_0|z|^k} \tag{2.17}$$

dla $z \in \bar{D}_{\tilde{r}}$.

Dla z spoza dysku $\bar{D}_{\tilde{r}}$ rozważmy $0 < \beta < \alpha$ oraz sektor $S_d(\beta)$. Wówczas krzywa całkowania γ przybierze kształt pokazany na Rysunku 2.1.



RYSUNEK 2.1 Krzywa $\gamma(z)$.

Niech β_0 spełnia nierówności $0<\beta<\beta_0<\alpha$ i niech $R(z)=C_4(2C_2)^{\frac{1}{k}}|z|$. Rozważymy dodatnio zorientowaną krzywą $\gamma(z)=\gamma(R)=\gamma_1+\gamma_2(R)+\gamma_3(R)+\gamma_4(R)$, gdzie:

- γ_1 jest łukiem łączącym punkty $\varepsilon e^{i(d+\frac{\beta_0}{2})}$ z $\varepsilon e^{i(d-\frac{\beta_0}{2})}$,
- $\gamma_2(R)$ jest odcinkiem łączącym punkty $\varepsilon e^{i(d-\frac{\beta_0}{2})}$ i $Re^{i(d-\frac{\beta_0}{2})}$,
- $\gamma_3(R)$ jest łukiem łączącym punkty $Re^{i(d-\frac{\beta_0}{2})}$ i $Re^{i(d+\frac{\beta_0}{2})}$,
- $\gamma_4(R)$ jest odcinkiem łączącym punkty $Re^{i(d+\frac{\beta_0}{2})}$ i $\varepsilon e^{i(d+\frac{\beta_0}{2})}$.

Na każdym z fragmentów krzywej $\gamma(R)$ dokonamy osobnych oszacowań całki $\int_0^{e^{i\theta}\infty}\zeta^n E(z\zeta)\frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\,d\zeta$.

Niech $w\in\gamma_1$. Wówczas zbiór

$$\Big(-\arg(w)-\frac{\pi}{2k},-\arg(w)+\frac{\pi}{2k}\Big)\cap\Big(-\arg(z)+\frac{\pi}{2k},-\arg(z)+2\pi-\frac{\pi}{2k}\Big)$$

jest niepusty i można wybrać należący do niego kierunek θ. Po parametryzacji $s\mapsto se^{i\theta}$ i oszacowaniu jak w poprzednim przypadku można badaną całkę rozbić na sumę dwóch całek

$$\int_0^\infty s^{n-1}|E(zse^{i\theta})|\frac{|e(wse^{i\theta})|}{\varepsilon}\,ds=\int_0^{\frac{M}{|z|}} s^{n-1}|E(zse^{i\theta})|\frac{|e(wse^{i\theta})|}{\varepsilon}\,ds+$$
$$+\int_{\frac{M}{|z|}}^\infty s^{n-1}|E(zse^{i\theta})|\frac{|e(wse^{i\theta})|}{\varepsilon}\,ds$$

dla pewnej stałej dodatniej M. Wówczas

$$\int_0^{\frac{M}{|z|}} s^{n-1}|E(zse^{i\theta})|\frac{|e(wse^{i\theta})|}{\varepsilon}\,ds\le\sup_{y\in\bar{D}_M}|E(y)|\varepsilon^{-1}C_3\int_0^{\frac{M}{|z|}}s^{n-1}\exp\Big(-\frac{\varepsilon^k s^k}{C_4^k}\Big)\,ds.$$

Analogicznie do poprzedniego przypadku ostatnią całkę możemy oszacować przez $A_1B_1^n m(n)$. Ponadto korzystając z własności (2.3), otrzymujemy

$$\int_{\frac{M}{|z|}}^\infty s^{n-1}|E(zse^{i\theta})|\frac{|e(wse^{i\theta})|}{\varepsilon}\,ds\le\int_{\frac{M}{|z|}}^\infty s^{n-1}\frac{K}{(s|z|)^\beta}\frac{|e(wse^{i\theta})|}{\varepsilon}\,ds\le$$
$$\le\frac{K}{\varepsilon M^\beta}\int_{\frac{M}{|z|}}^\infty s^{n-1}|e(wse^{i\theta})|\,ds.$$

Ostatnią całkę ponowne szacujemy przez $A_2B_2^n m(n)\exp(C_2|z|^k)$, korzystając z własności funkcji jądrowych. Wówczas otrzymujemy

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(w)\int_0^{e^{i\theta}\infty}\zeta^n E(z\zeta)\frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\,d\zeta\,dw\right\|_{\mathbb{E}}\le\tilde{A}_1\tilde{B}_1^n m(n)e^{\tilde{C}_1|z|^k}\tag{2.18}$$

dla pewnych stałych dodatnich $\tilde{A}_1,\ \tilde{B}_1,\ \tilde{C}_1$.

Dla $w \in \gamma_2(R)$ można ponownie wybrać θ z tego samego zbioru kierunków na płaszczyźnie. Korzystamy z podstawienia $[\varepsilon,\ R] \ni \rho \mapsto \rho e^{i(d-\frac{\beta_0}{2})}$ oraz wcześniejszej parametryzacji i szacujemy

$$\left| \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\, d\zeta \right| \leq \int_0^\infty s^{n-1} |E(zse^{i\theta})| \frac{|e(\rho s e^{i(\theta+d-\frac{\beta_0}{2})})|}{\rho}\, ds.$$

Argument analogiczny do wcześniejszego pozwala oszacować również tę całkę przez wyrażenie postaci $A_3 B_3^n m(n)$. Wówczas

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2(R)} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\, d\zeta\, dw \right\|_{\mathbb{E}} \leq \\ &\qquad \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{w\in\gamma_2(R)} \|f(w)\|_{\mathbb{E}} A_3 B_3^n m(n) R \leq \tilde{A}_2 \tilde{B}_2^n m(n) e^{\tilde{C}_2|z|^k} \end{aligned} \tag{2.19}$$

dla pewnych stałych dodatnich $\tilde{A}_2,\ \tilde{B}_2,\ \tilde{C}_2$. Dla krzywej $\gamma_4(R)$ przeprowadzić można identyczne rozumowanie. Wtedy

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4(R)} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\, d\zeta\, dw \right\|_{\mathbb{E}} \leq \tilde{A}_3 \tilde{B}_3^n m(n) e^{\tilde{C}_3|z|^k} \tag{2.20}$$

dla pewnych stałych dodatnich $\tilde{A}_3,\ \tilde{B}_3,\ \tilde{C}_3$.

W przypadku, gdy $w \in \gamma_3(R)$, korzystamy z wcześniejszej parametryzacji oraz z podstawienia $\left[d - \frac{\beta_0}{2},\ d + \frac{\beta_0}{2}\right] \ni t \mapsto Re^{it}$, przy czym kierunek θ może być wybrany dowolnie z przedziału $\left(-\arg(w) - \frac{\pi}{2k},\ -\arg(w) + \frac{\pi}{2k}\right)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\, d\zeta \right| &\leq \int_0^\infty s^{n-1} |E(zse^{i\theta})| \frac{|e(Rse^{i(\theta+t)})|}{R}\, ds = \\ &= \frac{1}{R} \int_0^\infty s^{n-1} |E(zse^{i\theta}) e(Rse^{i(\theta+t)})|\, ds. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $|w| = R(z)$ prawdziwa jest zależność analogiczna do (2.15). Wobec tego faktu otrzymujemy oszacowanie

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3(R)} f(w) \int_0^{e^{i\theta}\infty} \zeta^n E(z\zeta) \frac{e(w\zeta)}{w\zeta}\, d\zeta\, dw \right\|_{\mathbb{E}} \leq \tilde{A}_4 \tilde{B}_4^n m(n) e^{\tilde{C}_4|z|^k} \tag{2.21}$$

dla pewnych stałych dodatnich $\tilde{A}_4,\ \tilde{B}_4,\ \tilde{C}_4$. Teza twierdzenia wynika z (2.18), (2.19), (2.20) i (2.21)[14]. ■

Poniższe stwierdzenie opisuje zależność pomiędzy m-transformatą Borela i operatorem m-różniczkowym.

STWIERDZENIE 2.10 (Zasada przemienności) *Niech m_1 i m_2 będą funkcjami momentów. Wówczas operatory $\hat{\mathcal{B}}_{m_2,t}, \partial_{m_1,t} \colon \mathbb{E}[[t]] \to \mathbb{E}[[t]]$ spełniają zależność:*

$$\hat{\mathcal{B}}_{m_2,t}\partial_{m_1,t}\hat{u} = \partial_{m_1m_2,t}\hat{\mathcal{B}}_{m_2,t}\hat{u} \quad \textit{dla każdego} \quad \hat{u} \in \mathbb{E}[[t]].$$

Dowód: Niech $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$, gdzie $u_n \in \mathbb{E}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. Wówczas

$$\hat{\mathcal{B}}_{m_2,t}\partial_{m_1,t}\hat{u}(t) = \hat{\mathcal{B}}_{m_2,t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}m_1(n+1)}{m_1(n)}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}m_1(n+1)}{m_1(n)m_2(n)}t^n.$$

Z drugiej strony mamy

$$\partial_{m_1m_2,t}\hat{\mathcal{B}}_{m_2,t}\hat{u}(t) = \partial_{m_1m_2,t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m_2(n)}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}m_1(n+1)}{m_1(n)m_2(n)}t^n.$$

■

Jak zostało udowodnione w [10], korzystając z własności funkcji jądrowych można oszacować moment-pochodne funkcji. Wynik ten został uogólniony na przypadek wielowymiarowy w [13] i właśnie ta wersja wspomnianej własności zostaje przytoczona w poniższym stwierdzeniu.

STWIERDZENIE 2.11 *Weźmy funkcje momentów $m_1, \ldots, m_N$ nieujemnych rzędów $s_1, \ldots, s_N$ i wprowadźmy oznaczenie $s = (s_1, \ldots, s_N)$. Dodatkowo niech $D_R \subset \mathbb{C}^N$ będzie polidyskiem dla pewnych $R > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Rozważmy funkcję $f \in \mathcal{O}(D_R, \mathbb{E})$. Wówczas dla dowolnych $0 < r < r' < R$ istnieje stała dodatnia $\tilde{h} > 0$ taka, że dla dowolnego wielowskaźnika $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ spełniona jest nierówność*

$$\sup_{z\in D_r}\|\partial_{m_1,z_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{m_N,z_N}^{\alpha_N}f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq \sup_{z\in D_{r'}}\|f(z)\|_{\mathbb{E}}\tilde{h}^{|\alpha|}\Gamma(1+s\cdot\alpha).$$

Dowód: Dowód dla $N = 1$ przebiega analogicznie do części dowodu Twierdzenia 2.1 dotyczącej z z dysku D_ε. Dokładnej analizie zostanie tu poddany wyłącznie przypadek, gdy $N \geq 2$.

Po N-krotnym zastosowaniu przypadku jednowymiarowego otrzymujemy następującą nie-

[14] Twierdzenie to zostało udowodnione w ogólniejszej wersji. Porównaj [7, Twierdzenie 3]

równość:

$$\sup_{z\in D_r} \|\partial^{\alpha_1}_{m_1,z_1} \ldots \partial^{\alpha_N}_{m_N,z_N} f(z)\|_{\mathbb{E}} \le \sup_{z\in D_{r'}} \|f(z)\|_{\mathbb{E}} h^{|\alpha|}\Gamma(1+s_1\alpha_1)\ldots\Gamma(1+s_N\alpha_N).$$

Dla $u, w \in \mathbb{C}$ spełniających warunki $\operatorname{Re} u \ge 0,\ \operatorname{Re} w \ge 0$ mamy

$$\Gamma(u)\Gamma(w) \le \Gamma(u+w)$$

z własności funkcji Beta. Stąd $\Gamma(1+s_1\alpha_1)\ldots\Gamma(1+s_N\alpha_N) \le \Gamma(N+s\cdot\alpha)$. Następnie korzystamy z własności funkcji Gamma, aby otrzymać

$$\begin{aligned}\Gamma(N+s\cdot\alpha) = (N-1+s\cdot\alpha)\ldots(1+s\cdot\alpha)\Gamma(1+s\cdot\alpha) \le \\ \le e^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} e^{(N-2)s\cdot\alpha}\Gamma(1+s\cdot\alpha).\end{aligned}$$

Niech $\bar{s} = \max_{1\le j\le N} s_j$. Wówczas

$$\Gamma(N+s\cdot\alpha) \le e^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} e^{(N-2)\bar{s}|\alpha|}\Gamma(1+s\cdot\alpha).$$

Jako że zakładamy $|\alpha| \ge 1$, wystarczy przyjąć $\tilde{h} = he^{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} e^{(N-2)\bar{s}}$. ■

ROZDZIAŁ 3

Własności szeregów formalnych

3.1 Rząd Gevreya

DEFINICJA 3.1 Niech m będzie funkcją momentów rzędu s. Wówczas mówimy, że szereg formalny $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ jest *rzędu Gevreya* s, gdy istnieje $r > 0$, dla którego $\hat{\mathcal{B}}_{m,t}\hat{u} \in \mathcal{O}(D_r, \mathbb{E})$. Przestrzeń wszystkich takich szeregów formalnych oznaczamy symbolem $\mathbb{E}[[t]]_s$.

Z (2.4) wynika, że szereg formalny $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \in \mathbb{E}[[t]]$ jest rzędu Gevreya s wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe $B, C > 0$, dla których

$$\|u_n\|_{\mathbb{E}} \leq BC^n\Gamma_s(n) \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wobec tego łatwo zauważyć, że każdy szereg rzędu Gevreya 0 jest zbieżny. Ponadto rząd Gevreya nie zależy od wyboru funkcji momentów, a jedynie od jej rzędu.

UWAGA 3.1 Rząd Gevreya określa, jak bardzo zbliżone do funkcji analitycznych są badane szeregi formalne. Dokładniej, jeśli weźmiemy $0 < s_1 < s_2$, to funkcje rzędu Gevreya s_1 są bardziej podobne do analitycznych niż te rzędu s_2.

UWAGA 3.2 Do badania samego zagadnienia rzędu Gevreya szeregu formalnego nie jest konieczne rozważanie funkcji momentów związanych z funkcjami jądrowymi. Wystarczy przyjąć słabsze założenie o ciągach $(m(n))_{n\geq 0}$, że spełniona jest zależność (2.4). Ciągi zdefiniowane za pomocą tej relacji alternatywnie nazywamy *ciągami typu Gevreya*[1]. Takie osłabienie założeń nie wpływa w żaden sposób na zdefiniowane wcześniej operatory formalne.

PRZYKŁAD 3.1 Weźmy ciąg postaci $m(n) = \Gamma(1+n)$. Wówczas operator $\partial_{m,x}$ opisuje standardowe różniczkowanie względem zmiennej x.

PRZYKŁAD 3.2 Weźmy $s > 0$ i ciąg $m(n) = \Gamma(1+sn)$ Wówczas operator $\partial_{m,x}$ spełnia

$$(\partial_{m,x}\hat{u})(x^s) = \partial_x^s(\widehat{u}(x^s)),$$

[1]Porównaj: [22].

gdzie

$$\partial_x^s\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_j}{\Gamma(1+sj)}x^{sj}\Big):=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_{j+1}}{\Gamma(1+sj)}x^{sj}.$$

Operator ∂_x^s nazywamy pochodną ułamkową Caputo rzędu s.

3.2 Rozwinięcia asymptotyczne funkcji

Rozważmy pewien obszar sektorowy G oraz funkcję $f \in \mathcal{O}(G,\mathbb{E})$. Niech $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ będzie szeregiem formalnym o wyrazach z przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$.

DEFINICJA 3.2 Szereg formalny $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ nazywamy *rozwinięciem asymptotycznym* f *w* G, gdy dla każdego domkniętego sektora $\bar{S} \subset G$ i $N \in \mathbb{N}$ istnieje stała dodatnia C spełniająca warunek

$$|z|^{-N}\left\|f(z)-\sum_{n=0}^{N-1}f_nz^n\right\|_{\mathbb{E}} \le C \text{ dla każdego } z\in\bar{S}. \tag{3.1}$$

Korzystamy wówczas z oznaczenia $f(z) \cong \hat{f}(z)$.

W przypadku, gdy funkcja f jest jednowartościowa, możemy przy dodatkowych założeniach utożsamiać jej rozwinięcie asymptotyczne $\hat{f}$ z rozwinięciem Taylora wokół punktu zero.

STWIERDZENIE 3.1 *Załóżmy, że obszar sektorowy* G *ma kąt rozwarcia nie mniejszy niż* 2π *oraz* $f \in \mathcal{O}(G,\mathbb{E})$ *jest funkcją jednowartościową. Wówczas jej rozwinięcie asymptotyczne* $\hat{f}$ *jest szeregiem zbieżnym w pewnym otoczeniu zera i dla każdego* $n \in \mathbb{N}_0$ *prawdziwa jest zależność* $f_n n! = f^{(n)}(0)$.

Dowód: Zauważmy, że ponieważ funkcja f jest jednowartościowa i holomorficzna na G, jest też holomorficzna na pewnym dysku D_r bez środka. Wynika stąd, że możemy rozwinąć funkcję f w szereg Taylora wokół tego punktu, gdyż pozostaje ona ograniczona przy z dążącym do 0. Ponadto, po wprowadzeniu oznaczenia

$$r_f(z,N)=z^{-N}\left(f(z)-\sum_{n=0}^{N-1}f_nz^n\right)$$

można zaobserwować, że $\lim_{z\to 0} r_f(z,N) = f_N$ dla każdego $N \in \mathbb{N}$. Istotnie, mamy

$$r_f(z,N+1)=z^{-N-1}\left(f(z)-\sum_{n=0}^{N-1}f_nz^n-f_Nz^N\right)=z^{-1}(r_f(z,N)-f_N).$$

Stąd i z definicji rozwinięcia asymptotycznego wynika, że

$$\lim_{z\to 0} r_f(z,N)=\lim_{z\to 0}(zr_f(z,N+1)+f_N)=f_N.$$

Podobnie musimy mieć $f(z) \to f_0$ dla $z \to 0$. Ponieważ jednak rozwinięcie w szereg wokół danego punktu jest zawsze wyznaczone jednoznacznie, konieczne jest aby $f(0) = f_0$ oraz $\frac{f^{(N)}(0)}{N!} = f_N$ dla każdego $N \in \mathbb{N}$. Z faktu, że f jest holomorficzna w pewnym otoczeniu zera, wynika zbieżność szeregu $\hat{f}$ w tym otoczeniu. ■

W podobny sposób możemy jednoznacznie wyznaczyć rozwinięcie asymptotyczne funkcji holomorficznej f zdefiniowanej na obszarze sektorowym o kącie rozwarcia mniejszym niż 2π.

STWIERDZENIE 3.2 *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(G, \mathbb{E})$ i dla pewnego obszaru sektorowego G następujące warunki są równoważne:*

(a) Istnieje szereg formalny $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ taki, że $f(z) \cong \hat{f}(z)$ na G.

(b) f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w zerze i $f^{(n)}(0) = n! f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Wszystkie pochodne $f^{(n)}(z)$ są ciągłe w zerze i $\lim_{G \ni z \to 0} f^{(n)}(z) = n! f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Dowód: Aby udowodnić równoważność stwierdzeń (b) i (c), zauważmy na początek, że jeśli dla dowolnego ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$ funkcja $f^{(n)}(z)$ jest ciągła w zerze i $\lim_{G \ni z \to 0} f^{(n)}(z) = n! f_n$, to $f^{(n)}(0) = n! f_n$. Ponadto

$$\frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(0)}{z} - f^{(n+1)}(0) = \frac{1}{z} \int_0^z (f^{(n+1)}(w) - f^{(n+1)}(0))\, dw,$$

a zatem z ciągłości pochodnej rzędu $n+1$ w zerze otrzymujemy

$$\left\| \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(0)}{z} - f^{(n+1)}(0) \right\|_{\mathbb{E}} \leq \frac{1}{|z|} \int_0^{|z|} \varepsilon\, dw = \frac{1}{|z|} \varepsilon |z| = \varepsilon$$

dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ i $z \to 0$. Stąd $f^{(n)}(z)$ jest różniczkowalna w zerze.

Z drugiej strony, jeśli f spełnia (b), to możemy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ zapisać $f^{(n)}(z)$ jako

$$f^{(n)}(z) = f^{(n)}(0) + z f^{(n+1)}(0) + z h(z),$$

gdzie $h(0) = 0$ i $h(z)$ jest funkcją ciągłą w zerze. Ze wzoru całkowego Cauchy'ego otrzymujemy

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta,$$

przy czym $\gamma \subset G$ jest pewną krzywą zamkniętą. Stąd

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(0) + \zeta f^{(n+1)}(0) + \zeta h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = f^{(n+1)}(0) + h(z) + z h'(z).$$

Po przejściu do granicy otrzymujemy

$$\lim_{G\ni z\to 0} f^{(n+1)}(z) = \lim_{G\ni z\to 0}(f^{(n+1)}(0) + h(z) + zh'(z)) = f^{(n+1)}(0),$$

co daje nam ciągłość pochodnej w zerze.

Załóżmy teraz, że prawdziwe jest stwierdzenie (a). Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ i $z \in G$ mamy

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta - z|=r} \frac{\zeta^{n+1} r_f(\zeta, n+1)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, d\zeta = f^{(n)}(z) - n! f_n.$$

Zauważmy, że $r_f(z, n+1)$ jest funkcją holomorficzną na G. Jeśli $z \in \bar{S} \subset G$, możemy dobrać $r = \varepsilon|z|$, gdzie $\varepsilon \in (0,1)$. Wówczas mamy $\left|\frac{\zeta - z}{z}\right| = \varepsilon$, a więc $1 - \frac{\zeta}{z} = \varepsilon e^{i\tau}$ dla pewnego $\tau \in \mathbb{R}$. Zatem $1 - \frac{z}{\zeta} = 1 - \frac{1}{1-\varepsilon e^{i\tau}}$ oraz $\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| = \frac{|\varepsilon e^{i\tau}|}{|1-\varepsilon e^{i\theta}|} \geq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Stąd wnioskujemy, że dla pewnej stałej C zachodzi

$$|(f^{(n)}(z) - n! f_n)| \leq \frac{n!}{2\pi}\varepsilon|z|C = \tilde{C}|z|.$$

Przy $z \to 0$ prawa strona ostatniej nierówności dąży do 0, a zatem $f^{(n)}(z) \to n! f_n$ przy $z \to 0$.

Aby pokazać wynikanie z (c) do (a), skorzystamy ze wzoru Taylora z resztą w postaci całkowej. Rozwijamy funkcję f w otoczeniu dowolnego punktu z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \int_{z_0}^{z} \frac{(z-\zeta)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(\zeta)\, d\zeta.$$

Wówczas po przejściu do granicy $z_0 \to 0$ otrzymujemy następujące szacowanie dla $r_f(z, N)$:

$$\|r_f(z,N)\|_{\mathbb{E}} = |z|^{-N} \left\| \int_0^z \frac{(z-\zeta)^{N-1}}{(N-1)!} f^{(N)}(\zeta)\, d\zeta \right\|_{\mathbb{E}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{|z|^N (N-1)!}|z|^N \sup_{\zeta\in\bar{S}} \|f^{(N)}(\zeta)\|_{\mathbb{E}} \leq D$$

dla pewnej stałej $D > 0$. ■

Ustalmy pewien obszar sektorowy G. Rozważmy odwzorowanie J, które każdej funkcji holomorficznej f, dla której istnieje rozwinięcie asymptotyczne na G, przypisuje to rozwinięcie $\hat{f}$. W przypadku, gdy przestrzeń $\mathbb{E}$ jest algebrą Banacha, a więc w szczególności dla dowolnych $x, y \in \mathbb{E}$ mamy $\|xy\|_{\mathbb{E}} \leq \|x\|_{\mathbb{E}}\|y\|_{\mathbb{E}}$, odwzorowanie to okazuje się mieć interesujące własności.

STWIERDZENIE 3.3 *Niech $A(G,\mathbb{E})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f \in \mathcal{O}(G,\mathbb{E})$, dla których* *istnieje rozwinięcie asymptotyczne. Wówczas odwzorowanie*

$$J : A(G, \mathbb{E}) \to \mathbb{E}[[z]]$$

jest suriektywnym homomorfizmem algebr różniczkowych.

Dowód: Wprost z Definicji 3.2 wynika, że jeśli $f(z) \cong \hat{f}(z)$ i $g(z) \cong \hat{g}(z)$, to również $f(z) + g(z) \cong \hat{f}(z) + \hat{g}(z)$. Fakt, że wówczas także $\partial_z f(z) \cong \partial_z \hat{f}(z)$, można w prosty sposób wywnioskować ze Stwierdzenia 3.2. Niech $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ i $\hat{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$. Aby wykazać, że $J(fg) = J(f)J(g)$, zauważmy, najpierw, że

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} z^n = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1-k} f_k g_n z^{n+k} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^k \left(\sum_{n=0}^{N-k-1} g_n z^n \right)$$

Wówczas dla ustalonego domkniętego sektora $\bar{S} \subset G$ i $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$|z|^{-N} \left\| f(z)g(z) - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} z^n \right\|_{\mathbb{E}} \leq$$
$$\leq \|g(z)\|_{\mathbb{E}} \|r_f(z, N)\|_{\mathbb{E}} + \sum_{k=0}^{N-1} \|f_k\|_{\mathbb{E}} \|r_g(z, N-k)\|_{\mathbb{E}}. \quad (3.2)$$

Z ciągłości funkcji $g(z)$ oraz faktu, że wszystkie $\|f_k\|_{\mathbb{E}}$ są ograniczone, wynika, że prawa strona nierówności (3.2) jest ograniczona przez pewną stałą $C > 0$.

Pozostaje zatem wykazać, że odwzorowanie J jest suriekcją. Niech $G = G_d(\alpha)$ i niech $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$. Zdefiniujmy ponadto $\beta = \frac{\pi}{\alpha}$ oraz ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ zależny od współczynników szeregu $\hat{f}$ dany wzorem:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\|f_n\|_{\mathbb{E}}\, n!} & \text{dla } n: \; f_n \neq 0 \\ 0 & \text{dla } n: \; f_n = 0 \end{cases}.$$

W dalszej części dowodu wykorzystamy także funkcje pomocnicze $w_n(z)$ dane wzorem

$$w_n(z) = 1 - \exp\left(\frac{-a_n}{(ze^{-id})^{\beta}} \right) \text{ dla } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zauważmy, że $\operatorname{Re}\left(\frac{a_n}{(ze^{-id})^{\beta}}\right) \geq 0$ dla dowolnego $z \in G$. Istotnie, jeśli $z = |z|e^{i\theta}$ dla pewnego

$\theta \in \left(d - \frac{\alpha}{2},\, d + \frac{\alpha}{2}\right)$, to

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_n}{(ze^{-id})^\beta}\right) = \frac{a_n}{|z|^\beta}\cos\left(\beta(d-\theta)\right).$$

Ponadto $-\frac{\pi}{2} \leq \beta(d-\theta) \leq \frac{\pi}{2}$, a zatem $\cos\left(\beta(d-\theta)\right) > 0$. Wobec tego z Lematu 8.2 wynika zależność

$$|w_n(z)| \leq \frac{a_n}{|z|^\beta}.$$

Z tej nierówności dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ otrzymujemy

$$\|f_n\|_{\mathbb{E}}|z^n||w_n(z)| \leq \frac{|z|^{n-\beta}}{n!},$$

a zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n w_n(z)$ jest bezwzględnie zbieżny. Ponadto na każdym zwartym podzbiorze G szereg ten jest ograniczony. Wobec tego możemy zdefiniować funkcję $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n w_n(z)$, która jest holomorficzna na G.

Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ i rozważmy wyrażenie $z^{-N}(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n)$. Wykażemy, że dąży ono do 0 dla $z \to 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} z^{-N}\left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{n-N} w_n(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{n-N} = \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} f_n z^{n-N} w_n(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^{n-N} \exp\left(\frac{-a_n}{(ze^{-id})^\beta}\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $z \to 0$ wyrażenie $\exp\left(\frac{-a_n}{(ze^{-id})^\beta}\right)$ dąży do zera bardzo szybko. Składnik $\sum_{n=N}^{\infty} f_n z^{n-N} w_n(z)$ również dąży do zera jako ogon rozwinięcia funkcji holomorficznej w szereg. Stąd całe wyrażenie dąży do zera, a zatem fakt, że $f(z) \cong \hat{f}(z)$ dla $z \in G$, wynika wprost z definicji rozwinięcia asymptotycznego [2]. ■

STWIERDZENIE 3.4 *Odwzorowanie $J : A(G, \mathbb{E}) \to \mathbb{E}[[z]]$ nie jest różnowartościowe.*

Dowód: Dla dowolnego ustalonego $b \in \mathbb{E}$ rozważmy funkcję $f(z) = be^{-\frac{1}{z}}$ zdefiniowaną na $G = \{z :\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Wówczas $f \in \mathcal{O}(G, \mathbb{E})$. Ponadto zauważmy, że $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$ i mamy

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}} = \|b\|_{\mathbb{E}} e^{-\frac{\cos\theta}{|z|}},$$

gdzie $\theta = \arg z$. Ustalmy $N \in \mathbb{N}$ oraz taki domknięty sektor $\bar{S}$, aby $\bar{S} \subset S_0\left(\pi - \delta\right)$ dla

[2] Własność suriektywności odwzorowania J znana jest w literaturze jako Twierdzenie Ritta. Dowód za [1, Rozdział 4].

pewnego małego $\delta > 0$. Wówczas, jeśli $z \in \bar{S}$ i $\arg z = \theta$, to $\cos\theta \geq c$ dla pewnej dodatniej stałej c. Stąd otrzymujemy

$$\lim_{\bar{S}\ni z\to 0} |z|^{-N}\|f(z)\|_{\mathbb{E}} = \|b\|_{\mathbb{E}} \lim_{\bar{S}\ni z\to 0} |z|^{-N} e^{-\frac{\cos\theta}{|z|}} \leq \|b\|_{\mathbb{E}} \lim_{\bar{S}\ni z\to 0} |z|^{-N} e^{-\frac{c}{|z|}} = 0.$$

Wobec tego szereg formalny, którego wszystkie współczynniki są zerami, jest rozwinięciem asymptotycznym funkcji $f(z)$, która nie jest tożsamościowo równa 0.

Następnie załóżmy, że funkcja $f(z) \in \mathcal{O}(G, \mathbb{E})$ dla pewnego obszaru sektorowego G, a jej rozwinięciem asymptotycznym jest szereg o współczynnikach równych 0. Wówczas dla dowolnego ustalonego $k > 0$ i obszaru sektorowego G' zdefiniowanego za pomocą zależności $z \in G' \iff z^k \in G$ funkcja $g(z) = f(z^k)$ jest holomorficzna na G'. Ponadto

$$\lim_{G'\ni z\to 0} |z|^{-N}\|g(z)\|_{\mathbb{E}} = \lim_{G\ni t\to 0} |t|^{-\frac{N}{k}}\|f(t)\|_{\mathbb{E}}.$$

Dla $k \geq 1$ mamy

$$\lim_{G\ni t\to 0} |t|^{-\frac{N}{k}}\|f(t)\|_{\mathbb{E}} = \lim_{G\ni t\to 0} \frac{|t|^{-N}\|f(t)\|_{\mathbb{E}}}{|t|^{-N+\frac{N}{k}}} = 0.$$

Dla $k \in (0, 1)$

$$\lim_{G\ni t\to 0} |t|^{-\frac{N}{k}}\|f(t)\|_{\mathbb{E}} \leq \lim_{G\ni t\to 0} |t|^{-\tilde{N}}\|f(t)\|_{\mathbb{E}} = 0$$

dla dowolnego $\tilde{N} \geq \frac{N}{k}$. Wobec tego skoro odwzorowanie J nie jest różnowartościowe dla $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, to nie ma tej własności też w żadnym innym obszarze G. ■

Szczególną klasą rozwinięć asymptotycznych są rozwinięcia o określonym rzędzie Gevreya.

DEFINICJA 3.3 Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w obszarze sektorowym G i niech $s > 0$. Mówimy, że $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{E}[[z]]$ jest *rozwinięciem asymptotycznym rzędu Gevreya s funkcji f*, jeśli dla każdego domkniętego sektora $\bar{S} \subset G$ istnieją stałe dodatnie $C,\ K$, dla których spełniona jest zależność

$$\|r_f(z, N)\|_{\mathbb{E}} \leq CK^N\Gamma(1 + sN) \text{ dla każdego } N \in \mathbb{N}_0,\ z \in \bar{S}.$$

Zależność tę oznaczamy za pomocą $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$.

Zauważmy, że w przeciwieństwie do ogólniej zdefiniowanego rozwinięcia asymptotycznego ograniczenia w tym przypadku reszty $r_f(z, N)$ są precyzyjnie określone dla każdego $N \in \mathbb{N}_0$. Na podstawie Stwierdzeń 3.1 i 3.2 możemy także wywnioskować, że jeśli $f \cong_s \hat{f}$ na pewnym obszarze sektorowym G, to automatycznie $\hat{f}$ jest szeregiem formalnym rzędu Gevreya s. Ponadto Definicja 3.3 zachowuje sens również dla $s = 0$ – wówczas mamy do czynienia z funkcją holomorficzną w zerze i jej rozwinięciem w szereg potęgowy.

Podobnie jak w przypadku ogólnych rozwinięć asymptotycznych, tak i w przypadku rozwinięć o określonym rzędzie Gevreya s możemy rozważać odwzorowanie J, które przypisuje rozwinięcie tego rzędu każdej funkcji holomorficznej f, dla której ono istnieje. Analogicznie jak w Stwierdzeniu 3.3, możemy łatwo zauważyć, że J jest homomorfizmem algebr. Dla obszarów sektorowych o kącie rozwarcia nie większym niż $s\pi$ jest także suriekcją. Fakt ten jest znany jako Twierdzenie Ritta[3]. Ponadto dla obszarów o kącie rozwarcia większym niż $s\pi$ jest ono różnowartościowe, o czym mówi przytoczony poniżej Lemat Watsona.

TWIERDZENIE 3.1 (Lemat Watsona[4]) *Ustalmy $s > 0$. Niech G będzie dowolnym obszarem sektorowym o kącie rozwarcia większym niż $s\pi$. Wówczas, jeśli istnieje funkcja f holomorficzna na G spełniająca warunek $f(z) \cong_s 0$ na G, to musi zachodzić $f \equiv 0$ na G.*

Dowód: Zauważmy, że jeśli szereg o zerowych współczynnikach jest rozwinięciem asymptotycznym funkcji $f(z)$ rzędu Gevreya s na G, to dla każdego domkniętego sektora $\bar{S} \subset G$ istnieją stałe $c_1,\ c_2$, dla których

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq c_1 \exp(-c_2|z|^{-\frac{1}{s}}) \text{ dla } z \in \bar{S}. \tag{3.3}$$

Istotnie, wprost z Definicji 3.3 wynika, że

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C(|z|K)^n \Gamma(1+sn) \text{ dla każdego } z \in \bar{S},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Korzystając ze wzoru Stirlinga, można zastąpić $\Gamma(1+sn)$ ciągiem n^{sn} (dla innych stałych C i K). Analiza monotoniczności ciągu $a_n = (|z|K)^n n^{sn}$ pokazuje, że ciąg ten do pewnego miejsca maleje, następnie zaś rośnie, a jego najmniejszy wyraz ma indeks n_0 spełniający nierówności $e^{-1}(K|z|)^{-\frac{1}{s}} - 1 \leq n_0 \leq e^{-1}(K|z|)^{-\frac{1}{s}}$. Wobec tego

$$a_{n_0} = [|z|Kn_0^s]^{n_0} \leq e^{-sn_0} \leq e^s e^{-c_2|z|^{-1/s}}$$

dla $c_2 = se^{-1}K^{-\frac{1}{s}}$. Zależność (3.3) jest prawdziwa dla $c_1 = e^s C$.

Niech $\bar{S} = \bar{S}_d(\alpha, r) \subset G$ będzie sektorem domkniętym o kącie rozwarcia $\alpha > s\pi$. Z (3.3) wynika w szczególności istnienie stałej $C > 0$, dla której $\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C$ dla $z \in \bar{S}$. Ustalmy $\kappa = \frac{\pi}{\alpha}$ oraz zdefiniujmy funkcję $z(\omega) = e^{id}(r^{-\kappa}+\omega)^{-\frac{1}{\kappa}}$ dla ω spełniających warunek $\mathrm{Re}\,\omega \geq 0$.

[3] Porównaj [1, Rozdział 4.6].

[4] Lemat wraz z dowodem przytoczony na podstawie [1, Podrozdział 4.7].

Wówczas dla $\omega = |\omega|e^{i\theta}$, gdzie $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, mamy

$$|z(\omega)| \leq \left(\sqrt{r^{-2\kappa} + 2r^{-\kappa}|\omega|\cos\theta}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} \leq r.$$

Ponadto

$$\arg(z(\omega)) = d - \frac{1}{\kappa}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|\omega|\sin\theta}{r^{-\kappa} + |\omega|\cos\theta}\right).$$

Mamy zatem $d < \arg(z(\omega)) \leq d + \frac{\alpha}{2}$ dla $\theta < 0$ i $d - \frac{\alpha}{2} \leq \arg(z(\omega)) \leq d$ dla $\theta \geq 0$. Stąd dla ω z prawej półpłaszczyzny domkniętej zachodzi $z(\omega) \in \bar{S}$.

Niech x będzie dowolną liczbą dodatnią i niech dana będzie funkcja $g(\omega) = e^{x\omega}f(z(\omega))$. Wówczas z faktu, że $\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C$, na prostej $\operatorname{Re}\omega = 0$ prawdziwa jest nierówność $\|g(\omega)\|_{\mathbb{E}} \leq C$. Z (3.3) i nierówności $\kappa < \frac{1}{s}$ wynika, że istnieje również $\tilde{C} > 0$, dla którego $\|g(\omega)\|_{\mathbb{E}} \leq \tilde{C}$ dla $\operatorname{Re}\omega \geq 0$.

Z Twierdzenia 8.1 otrzymujemy

$$\|g(\omega)\|_{\mathbb{E}} = e^{x\operatorname{Re}\omega}\|f(z(\omega))\|_{\mathbb{E}} \leq C \text{ dla } \operatorname{Re}\omega \geq 0.$$

Ponieważ jednak przy $\lim_{x\to+\infty} e^{x\operatorname{Re}\omega} = +\infty$, z ostatniej nierówności wynika, że $f \equiv 0$. ■

3.3 Sumowalność

Dalsza część tego rozdziału poświęcona jest problemowi sumowalności szeregów formalnych.

DEFINICJA 3.4 Niech $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ będzie szeregiem formalnym o współczynnikach z dowolnej przestrzeni Banacha $\mathbb{E}$. Przyjmijmy też $k > 0$ i $d \in \mathbb{R}$. Wówczas mówimy, że $\hat{f}$ jest *k-sumowalny w kierunku* d, gdy istnieją $\alpha > \frac{\pi}{k}$ obszar sektorowy $G = G_d(\alpha)$ oraz funkcja $f \in \mathcal{O}(G, \mathbb{E})$ takie, że $\hat{f}$ jest rozwinięciem asymptotycznym Gevreya rzędu $\frac{1}{k}$ funkcji f na G. Funkcję f nazywamy wówczas k-sumą szeregu formalnego $\hat{f}$ w kierunku d i zapisujemy $f(z) = (S_{k,d}\hat{f})(z)$.

Zbiór wszystkich $\hat{f}(z)$, które są k-sumowalne w kierunku d oznaczamy przez $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$.

Zauważmy, że z Lematu Watsona (Twierdzenie 3.1) wynika jednoznaczność zdefiniowanego wyżej przyporządkowania. Dla k-sumowalnego szeregu formalnego $\hat{f}$ można ponadto wyznaczyć jego sumę f przy użyciu odpowiednio dobranych operatorów Borela i Laplace'a, co ilustruje poniższe twierdzenie[5].

[5]Porównaj: [1, Twierdzenie 33]

TWIERDZENIE 3.2 *Niech $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}[[z]]_{1/k}$ i niech $\hat{g}(z) = \hat{\mathcal{B}}_{m,z}\hat{f}(z)$ dla pewnego ciągu momentów $(m(n))_{n\geq 0}$ rzędu $\frac{1}{k}$. Wówczas szereg $\hat{g}(z)$ jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera. Oznaczmy jego sumę przez $g(z)$. Wówczas $\hat{f}(z)$ jest k-sumowalny w kierunku $d \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sektor $S_d(\varepsilon)$, gdzie ε jest pewną dostatecznie małą liczbą dodatnią, na który można analitycznie przedłużyć funkcję $g(z)$ tak, że ma ona wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k.*

Twierdzenie to jest bezpośrednią konsekwencją zaprezentowanych w poprzednim podrozdziale własności operatorów Borela i Laplace'a.

UWAGA 3.3 Przy zachowaniu oznaczeń z Twierdzenia 3.2 mamy $f(z) = \mathcal{L}_{e,d}g(z)$.

LEMAT 3.1 *Ustalmy $k > 0$ i niech $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ dla pewnego $d \in \mathbb{R}$. Wówczas dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ szereg formalny $\hat{f}(z)$ jest k-sumowalny w dowolnym kierunku $\tilde{d} \in (d-\varepsilon,\, d+\varepsilon)$.*

Dowód: Wystarczy zauważyć, że dla $G_d(\alpha)$, gdzie $\alpha > \frac{\pi}{k}$, i dostatecznie małych ε możemy dobrać $\tilde{\alpha} > 0$ w taki sposób, aby $G_{\tilde{d}}(\tilde{\alpha}) \subset G_d(\alpha)$ oraz $\tilde{\alpha} > \frac{\pi}{k}$. Teza wynika bezpośrednio z tej obserwacji i definicji k-sumowalności. ∎

Bezpośrednią konsekwencją Lematu 3.1 jest następujący fakt:

UWAGA 3.4 Zbiór kierunków d, w których dany szereg formalny jest k-sumowalny dla pewnego $k > 0$, jest zawsze otwarty w $\mathbb{R}$.

Powyższą uwagę ilustruje następujący prosty przykład:

PRZYKŁAD 3.3 Rozważmy szereg formalny $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)}{\Gamma(1+n)} z^n$ dla dowolnego $k > 0$. Zauważmy, że dla $m(n) = \Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)$ mamy

$$\hat{g}(z) = (\hat{\mathcal{B}}_{m,z}\hat{f})(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1+n)} z^n = e^z,$$

a zatem jest zawsze szeregiem zbieżnym. Aby udowodnić, że $\hat{f}(z)$ jest k-sumowalny w pewnym kierunku $d \in \mathbb{R}$, należy jeszcze wykazać, że funkcja $g(z) = e^z$ ma wykładnicze tempo wzrostu równe co najwyżej k, a więc że dla pewnych stałych dodatnich $C,\ D$

$$|e^z| \leq Ce^{D|z|^k} \text{ dla } \arg z \text{ bliskich kierunkowi } d,\ z \to \infty.$$

Warunek ten możemy alternatywnie zapisać (w pewnym uproszczeniu) następująco:

$$e^{|z|\cos d} \leq Ce^{D|z|^k} \text{ dla } |z| \to +\infty.$$

Zauważmy, że wobec tego zachodzić musi zależność $|z|\cos d - D|z|^k \leq \ln C$.

Dla $\cos d < 0$ nierówność jest prawdziwa niezależnie od wyboru $k > 0$. Stąd dla dowolnego $k > 0$ szereg $\hat{f}(z)$ jest k-sumowalny w kierunkach $d \in \left(2\pi m + \frac{\pi}{2},\, 2\pi m + \frac{3\pi}{2}\right),\ m \in \mathbb{Z}$.

W przypadku $\cos d > 0$ nierówność jest spełniona wyłącznie, gdy $k \geq 1$. Zatem $\hat{f}(z)$ jest k-sumowalny w kierunkach $d \in \left(2\pi m - \frac{\pi}{2},\, 2\pi m + \frac{\pi}{2}\right),\ m \in \mathbb{Z}$ wyłącznie dla $k \geq 1$.

Kolejny prosty fakt pozwala utożsamiać ze sobą kierunki różniące się dokładnie o wielokrotność 2π mimo że nadal mamy do czynienia z powierzchnią Riemanna logarytmu.

LEMAT 3.2 *Dla $\tilde{d} = d + 2\pi$ oraz dowolnego $k > 0$ k-sumowalność szeregu formalnego $\hat{f}(z)$ w kierunkach d i $\tilde{d}$ są równoważne. Ponadto $(S_{k,\tilde{d}}\hat{f})(z) = (S_{k,d}\hat{f})(ze^{-2\pi i})$ dla tych z, dla których obie strony równości są poprawnie zdefiniowane.*

Dowód: Aby udowodnić powyższy fakt, wystarczy wykazać, że jeśli $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ na obszarze sektorowym $G_d(\alpha)$, to $f(ze^{\pm 2\pi i}) \cong_s \hat{f}(z)$ na $G_{d\mp 2\pi}(\alpha)$. Dowód zostanie przeprowadzony wyłącznie dla $f(ze^{2\pi i})$. Drugi z przypadków jest analogiczny.

Zauważmy, że jeśli $ze^{2\pi i} \in G_d(\alpha)$, to $z \in G_{d-2\pi}(\alpha)$. Zgodnie z założeniem mamy $f(ze^{2\pi i}) \cong_s \hat{f}(ze^{2\pi i})$ na $G_{d-2\pi}(\alpha)$. Zatem dla ustalonych $\bar{S} \subset G_{d-2\pi}(\alpha)$ i $N \geq 1$ otrzymujemy

$$\|r_f(ze^{2\pi i}, N)\|_{\mathbb{E}} \leq CK^N\Gamma(1 + sN) \text{ dla } z \in \bar{S}.$$

Możemy dokonać następującego oszacowania:

$$|z|^{-N}\left\|f(ze^{2\pi i}) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\right\|_{\mathbb{E}} \leq |z|^{-N}\left\|f(ze^{2\pi i}) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{2\pi n i} z^n\right\|_{\mathbb{E}} + \\ + |z|^{-N}\left\|\sum_{n=0}^{N-1} f_n(e^{2\pi n i} - 1)z^n\right\|_{\mathbb{E}}.$$

Drugi składnik prawej strony jest równy 0, więc otrzymujemy:

$$|z|^{-N}\left\|f(ze^{2\pi i}) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\right\|_{\mathbb{E}} \leq \|r_f(ze^{2\pi i}, N)\|_{\mathbb{E}} \leq CK^N\Gamma(1 + sN).$$

■

UWAGA 3.5 k-suma dowolnego k-sumowalnego szeregu formalnego $\hat{f}(z)$ nie zależy od doboru funkcji jądrowych do zdefiniowania operatorów Borela i Laplace'a. Wybór funkcji jądrowych może mieć wpływ jedynie na obszar sektorowy, na którym ta suma jest zdefiniowana.

Korzystając z omówionych dotychczas pojęć, możemy również zdefiniować moment-różniczkowanie sum szeregów formalnych[6]:

DEFINICJA 3.5 Niech $\mathbb{E}$ będzie dowolną przestrzenią Banacha. Rozważmy ciąg momentów $(m(n))_{n\geq 0}$ rzędu $\frac{1}{k}$ oraz szereg formalny $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ dla pewnego kierunku $d \in \mathbb{R}$. Ponadto niech $f(z)$ oznacza k-sumę szeregu $\hat{f}(z)$. Wówczas definiujemy *m-pochodną funkcji $f(z)$* jako $\partial_{m,z} f(z) = g(z)$, gdzie $g(z) = S_{k,d}\left(\partial_{m,z}\hat{f}(z)\right)$.

TWIERDZENIE 3.3 *Przy ustalonych $k > 0$ i $d \in \mathbb{R}$ zbiór $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ jest algebrą różniczkową zamkniętą ze względu na działanie operatora $\partial_{m,z}$.*

Dowód: Zauważmy, że zbiór $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ jest zamknięty ze względu na dodawanie szeregów, co wynika z liniowości operatorów Borela i Laplace'a. Ponadto dodawanie to jest przemienne i łączne.

Przez mnożenie dwóch elementów $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ rozumiemy iloczyn Cauchy'ego szeregów zdefiniowany jak w Uwadze 1.1. Działanie to jest rozdzielne względem dodawania elementów z $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$. Ponadto dla dowolnych $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ i stałej C mamy

$$C(\hat{u}(z)\hat{v}(z)) = (C\hat{u}(z))\hat{v}(z) = \hat{u}(z)(C\hat{v}(z)).$$

Standardowe różniczkowanie względem zmiennej z spełnia:

$$\partial_z(\hat{u}(z)\hat{v}(z)) = (\partial_z\hat{u}(z))\hat{v}(z) + \hat{u}(z)(\partial_z\hat{v}(z)).$$

Pozostaje udowodnić, że $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ jest zamknięta ze względu na działanie m-operatora różniczkowego $\partial_{m,z}$. Niech $\tilde{e}, \tilde{E}$ będą parą funkcji jądrowych rzędu k ze związaną funkcją momentów $\tilde{m}$. Ze Stwierdzenia 2.2 wynika, że również $m \cdot \tilde{m}$ jest funkcją momentów. Niech $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$. Wówczas szereg $\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},z}\hat{f}(z)$ definiuje funkcję, która dla pewnego sektora S_d i dysku $D = D(0,\varepsilon)$ ma wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k na $S_d \cup D$. Z Twierdzenia 2.1 dla $n = 1$ i ciągu momentów $(m(n)\tilde{m}(n))_{n\geq 0}$ otrzymujemy

$$\|\partial_{m\tilde{m},z}\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},z}\hat{f}(z)\|_{\mathbb{E}} \leq Ae^{C|z|^k}$$

dla pewnych dodatnich stałych A, C, skąd wynika, że $\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},z}\hat{f}(z)$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu zera i ma wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k na $S_d \cup D$. Z zasady przemienności (Stwierdzenie 2.10) otrzymujemy także równość

$$\partial_{m\tilde{m},z}\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},z}\hat{f}(z) = \hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},z}\partial_{m,z}\hat{f}(z).$$

[6]Porównaj: [8, Definicja 13]

Stąd wnioskujemy, że $\partial_{m,z}\hat{f}(z) \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$. ■

Istotny dla dalszych rozważań jest również fakt, że przy ustalonych $k > 0$ oraz $d \in \mathbb{R}$ zbiór $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ jest zamknięty ze względu na działanie operatora $\partial_{m,z}^{-1}$.

STWIERDZENIE 3.5 *Ustalmy $k,\ s > 0$. Niech $(m(n))_{n\geq 0}$ będzie ciągiem momentów rzędu s. Jeżeli $\hat{f}(z)$ jest szeregiem formalnym k-sumowalnym w kierunku $d \in \mathbb{R}$ i jego sumę oznaczymy przez $f(z)$, to szereg formalny $\partial_{m,z}^{-1}\hat{f}(z)$ również jest k-sumowalny w kierunku d i jego suma $F(z)$ spełnia warunek $\partial_{m,z}U(z) = u(z)$[7].*

Dowód: W dowodzie wykorzystana zostanie wspomniana wcześniej pochodna ułamkowa Caputo zdefiniowana w Przykładzie 3.2. Rozważmy na początek ciąg momentów dany wzorem $m(n) = \Gamma(1 + sn)$. Operator m-różniczkowy $\partial_{m,z}$ można wówczas powiązać z pochodną Caputo ∂_z^s w następujący sposób:

$$(\partial_{m,z}\hat{f})(z^s) = \partial_z^s(\hat{f}(z^s)).$$

Wobec tego w szczególności mamy

$$\partial_z^{-s} z^{sn} = \frac{\Gamma(1+sn)}{\Gamma(1+sn+s)} z^{sn+s}.$$

Jak zostało wspomniane w [8, Proposition 5], taką własność ma całka ułamkowa Riemanna-Liouville'a zdefiniowana za pomocą wzoru

$$I_{0+}^s := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z f(t)(z-t)^{s-1}\,dt.$$

Ustalmy sektor $S \subset G$. Aby dowieść prawdziwości tezy, oszacujemy wyrażenie postaci

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z f(t^s)(z-t)^{s-1}\,dt - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{f_{n-1}}{\Gamma(1+sn)} z^{sn} \right\|_{\mathbb{E}} \tag{3.4}$$

dla każdego $S \subset G$ i naturalnego $N \geq 2$. W tym celu skorzystamy z następującej własności funkcji Beta Eulera[8]:

$$z^{sn} B\left(s,\ sn - s + 1\right) = \int_0^z (z-t)^{s-1} t^{sn-s}\,dt,$$

gdzie $B\left(s,\ sn-s+1\right) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1+sn-s)}{\Gamma(1+sn)}$. Wobec powyższego wyrażenie (3.4) przyjmuje po-

[7] Stwierdzenie to jest szczególnym przypadkiem Proposition 5 z [8].
[8] Porównaj [1, Dodatek B].

stać:

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^z \frac{t^{-sN+s}\left(f(t^s) - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{f_{n-1}}{\Gamma(1+sn-s)} t^{sn-s} \right)}{t^{-sN+s}(z-t)^{1-s}} \, dt \right\|_{\mathbb{E}} \tag{3.5}$$

Ponieważ wiemy, że $\hat{f}(z) \cong_{\frac{1}{k}} f(z)$, normę licznika wyrażenia pod całką w (3.5) możemy oszacować przez $CK^{N-1}\Gamma\left(1+\frac{N-1}{k}\right)$ dla pewnych stałych dodatnich $C,\ K$. Ponadto po dokonaniu zamiany zmiennych $t = z\xi$ otrzymujemy

$$\int_0^z t^{s(N-1)}(z-t)^{s-1} \, dt = z^{sN} \int_0^1 \xi^{s(N-1)}(1-\xi)^{s-1} \, d\xi.$$

Ostatnia całka definiuje funkcję Beta $B\left(s, 1+sN-s\right) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1+sN-s)}{\Gamma(1+sN)}$.

Stąd oraz z Lematu 8.1 wyrażenie (3.5) może zostać oszacowane przez

$$CK^{N-1}\Gamma\left(1+\frac{N-1}{k}\right)|z|^{sN}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1+sN-s)}{\Gamma(1+sN)} \leq \tilde{C}\tilde{K}^{N}\Gamma\left(1+\frac{N}{k}\right)|z|^{sN}.$$

Aby wykazać prawdziwość stwierdzenia dla dowolnego ciągu momentów rzędu s, należy zdefiniować ciąg momentów rzędu 0 daną za pomocą wzoru $\tilde{m}(n) = \frac{\Gamma(1+sn)}{m(n)}$. Wówczas, jeśli mamy $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{m(n)} z^n$, wystarczy zamiast niego rozważyć $\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},z}\hat{f}(z)$, dla którego dowód został przeprowadzony powyżej. ■

W dalszych rozważaniach na temat sumowalności rozwiązań formalnych równań różniczkowych pomocna okaże się także następująca charakterystyka pochodnych k-sumy szeregu sumowalnego:

STWIERDZENIE 3.6 *Niech $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ dla pewnych $k > 0,\ d \in \mathbb{R}$ i niech $f(z) = S_{k,d}(\hat{f}(z))$ na pewnym obszarze sektorowym $G_d(\alpha)$, gdzie $\alpha > \frac{\pi}{k}$. Wówczas dla każdego domkniętego sektora $\bar{S} \subset G_d(\alpha)$ istnieją stałe dodatnie $A,\ B$, dla których*

$$\|\partial_{m,z}^n f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq AB^n m(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right) \text{ dla dowolnych } z \in \bar{S},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód: Zauważmy, że z definicji k-sumowalności oraz ze Stwierdzenia 2.10 otrzymujemy

$$\partial_{m,z}^n f(z) = \mathcal{L}_{e,d}(\hat{\mathcal{B}}_{\Gamma_{1/k},z}\partial_{m,z}^n\hat{f}(z)) = \mathcal{L}_{e,d}(\partial_{m\Gamma_{1/k},z}^n\hat{\mathcal{B}}_{\Gamma_{1/k},z}\hat{f}(z)).$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ i pewnej funkcji jądrowej $e(z)$ rzędu k. Ponadto funkcja $\hat{\mathcal{B}}_{\Gamma_{1/k},z}\hat{f}(z)$ ma wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k na zbiorze $S_d(\delta) \cup D_r$ dla pewnych $\delta,\ r > 0$.

Możemy zatem zastosować do niej i ciągu momentów $\left(m(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\right)_{n\geq 0}$ Twierdzenie 2.1, w wyniku czego dla dowolnego sektora $\bar{S}\subset G$ otrzymujemy

$$\|\partial^n_{m\Gamma_{1/k},z}\hat{\mathcal{B}}_{\Gamma_{1/k},z}\hat{f}(z)\|_{\mathbb{E}}\leq A_1B_1^n m(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)e^{C_1|z|^k}$$

dla pewnych stałych $A_1,\ B_1,\ C_1>0$ oraz dla wszystkich $z\in\bar{S}$.

Wprowadźmy oznaczenie $g(z)=\hat{\mathcal{B}}_{\Gamma_{1/k},z}\hat{f}(z)$. Wówczas $\partial^n_{m,z}f(z)=\mathcal{L}_{e,d}g(z)$, wobec czego do zakończenia dowodu wystarczy oszacować całkę $\int_0^{e^{i\tau}\infty}e\left(\frac{u}{z}\right)g(u)\frac{du}{u}$ dla dowolnego kierunku τ bliskiego d. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 2.1, wykorzystamy w tym celu podstawienie $s\mapsto se^{i\tau}$. Wówczas

$$\left\|\int_0^{e^{i\tau}\infty}e\left(\frac{u}{z}\right)g(u)\frac{du}{u}\right\|_{\mathbb{E}}\leq A_1B_1m(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\int_0^\infty\left|e\left(\frac{se^{i\tau}}{z}\right)\right|e^{Cs^k}\frac{ds}{s},$$

a także

$$\int_0^\infty\left|e\left(\frac{se^{i\tau}}{z}\right)\right|e^{Cs^k}\frac{ds}{s}=\int_0^M\left|e\left(\frac{se^{i\tau}}{z}\right)\right|e^{Cs^k}\frac{ds}{s}+\int_M^\infty\left|e\left(\frac{se^{i\tau}}{z}\right)\right|e^{Cs^k}\frac{ds}{s}$$

dla dowolnego dodatniego M. Pierwszą całkę możemy ograniczyć przez stałą, szacując funkcję jądrową $e(\zeta)$ z własności (2.2). Drugą całkę szacujemy korzystając z faktu, że $e(\zeta)$ spełnia nierówność $|e(\zeta)|\leq C_2e^{-C_3|\zeta|^k}$ dla pewnych stałych $C_2,\ C_3$. ■

ROZDZIAŁ 4

Równania liniowe o współczynnikach zależnych od zmiennej czasowej t

Niniejszy rozdział poświęcony jest wykorzystaniu norm formalnych do określenia rzędu Gevreya rozwiązań równań liniowych o współczynnikach zależących wyłącznie od zmiennej czasowej $t \in \mathbb{C}$. Metoda ta została oparta na rozważaniach z [25], a do równań moment-różniczkowych została zastosowana w [13].

4.1 Diagram Newtona

Pojęcie diagramu Newtona dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych zostało po raz pierwszy zaprezentowane w [28], gdzie zostało wykorzystane do opisania rzędu Gevreya rozwiązań formalnych tych równań[1]. Później definicja została rozszerzona także na równania moment-różniczkowe o stałych współczynnikach w [10] oraz o zmiennych współczynnikach w [13] i [22].

Zaprezentowana poniżej bardzo ogólna definicja diagramu Newtona będzie wykorzystywana także w dalszych rozdziałach.

Rozważmy funkcje momentów $m_0, m_1, \ldots, m_N$ rzędów kolejno $s_0, s_1, \ldots, s_N$, dowolne $t \in \mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C}^N$ oraz liniowy operator moment-różniczkowy zdefiniowany za pomocą wzoru:

$$P\left(t, z, \partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1} \ldots, \partial_{m_N,z_N}\right) = \sum_{\Sigma \times J \times A} a_{\sigma,j,\alpha}(z) t^{\sigma} \partial_{m_0,t}^{j} \partial_{m,z}^{\alpha}, \tag{4.1}$$

gdzie $J \subset \mathbb{N}_0$ i $A \subset \mathbb{N}_0^N$ są skończonymi zbiorami indeksów, $\Sigma \subset \mathbb{N}_0$ jest (niekoniecznie skończonym) zbiorem indeksów oraz $\partial_{m,z}^{\alpha} = \partial_{m_1,z_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{m_N,z_N}^{\alpha_N}$ dla dowolnego wielowskaźnika $\alpha \in A$. Wówczas dla operatora (4.1) definiujemy diagram Newtona w następujący sposób:

DEFINICJA 4.1 *Diagramem Newtona dla operatora P* zadanego wzorem (4.1) nazywamy zbiór

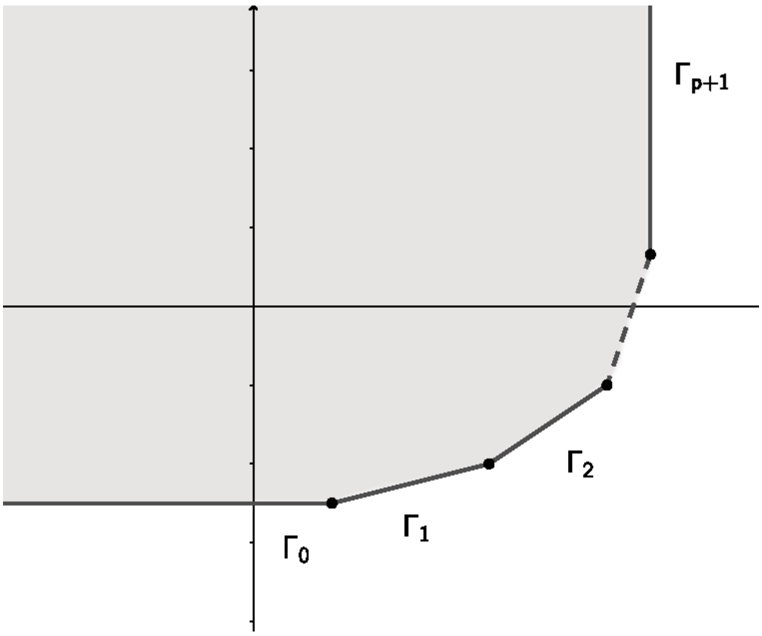
[1] Pojęcie diagramu Newtona pojawia się w literaturze także w nieco zmodyfikowanych postaciach, na przykład w [25].

postaci

$$N\left(P\right)=\operatorname{conv}\left\{\bigcup_{(\sigma,j,\alpha)\in\Sigma\times J\times A}\Delta\left(s_0 j+s_1\alpha_1+\cdots+s_N\alpha_N,\,\sigma-j\right)\right\},\tag{4.2}$$

gdzie $\Delta(a,\,b)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\leq a,\,y\geq b\}$.

Zauważmy, że tak zdefiniowany diagram Newtona będzie miał na brzegu co najmniej jeden wierzchołek – punkt postaci $(s_0 j+s\cdot\alpha,\,\sigma-j)$, gdzie $s=(s_1,\ldots,s_N)$ i $s\cdot\alpha$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Na brzeg $N(P)$ składają się zatem zawsze dwie prostopadłe półproste wychodzące z jednego punktu oraz, w przypadku większej ilości wierzchołków, odcinki nachylone pod pewnymi kątami do osi poziomej. Orientacyjny przykład diagramu Newtona z większą ilością wierzchołków przedstawia Rysunek 4.1.



RYSUNEK 4.1 Poglądowy przykład diagramu Newtona.

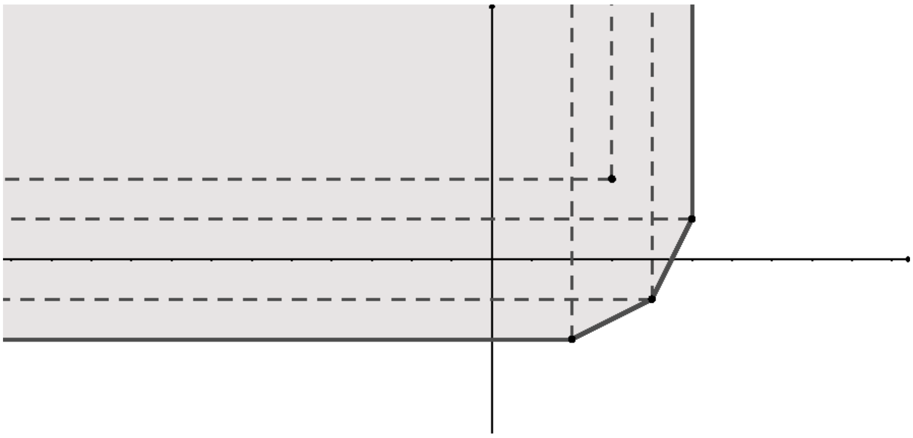
Szczególną uwagę poświęcimy odcinkowi Γ_1 wychodzącemu z pierwszego wierzchołka na brzegu $N(P)$. Jeżeli wierzchołek ten jest jedynym istniejącym, to Γ_1 jest w rzeczywistości półprostą pionową. W przeciwnym przypadku odcinek ten będzie dodatnio nachylony względem osi odciętych i jednocześnie jego kąt nachylenia będzie w tym diagramie najmniejszym możliwym, co można zaobserwować na Rysunkach 4.1 i 4.2.

Poniższy prosty przykład demonstruje sposób powstawania diagramu Newtona.

PRZYKŁAD 4.1 Niech $t,\,z\in\mathbb{C}$ i rozważmy operator różniczkowy postaci

$$P(\partial_t,\partial_z)=\partial_t^2-t\partial_t^2\partial_z^2+t^3\partial_t^2\partial_z^3+t^2\partial_z^3\tag{4.3}$$

ze standardowym różniczkowaniem względem obu zmiennych. Wówczas kolejnym składnikom odpowiadają następujące punkty na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$: $(2,-2)$, $(4,-1)$, $(5,1)$ i $(3,2)$. Naszkicowany na tej podstawie diagram Newtona przedstawia Rysunek 4.2.



RYSUNEK 4.2 Diagram Newtona dla operatora z Przykładu 4.1.

W dalszej części pracy rozważymy związek pomiędzy rzędem Gevreya rozwiązania formalnego równania

$$P\left(t, z, \partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1} \ldots, \partial_{m_N,z_N}\right) u(t,z) = f(t,z) \tag{4.4}$$

i nachyleniem k_1 pierwszego niepoziomego odcinka w brzegu diagramu Newtona $N(P)$ przy dodatkowych założeniach zarówno dla samego operatora P, jak i dla funkcji f.

4.2 Normy formalne

Normy formalne pozwalają efektywnie oszacować daną funkcję zmiennej zespolonej. Przytoczone poniżej definicje i własności wraz z dowodami pochodzą w całości z [13] i są bezpośrednim uogólnieniem narzędzi wykorzystanych w [25]. W dalszej części tego podrozdziału przyjmujemy, że $N \in \mathbb{N}$ jest dowolne i rozważamy $z \in \mathbb{C}^N$.

DEFINICJA 4.2 Oznaczmy przez s wektor postaci $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$. Niech $f(z) \in \mathcal{O}(D_R)$. Wówczas dla dowolnego $\rho \in \mathbb{C}^N$ *normę formalną funkcji* f definiujemy jako:

$$\|f(z)\|_\rho := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|\partial^\alpha_{\Gamma_s,z} f(z)|}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)} \rho^\alpha \tag{4.5}$$

gdzie $\partial^\alpha_{\Gamma_s,z} = \partial^{\alpha_1}_{\Gamma_{s_1},z_1} \ldots \partial^{\alpha_N}_{\Gamma_{s_N},z_N}$ i $\rho^\alpha = {\rho_1}^{\alpha_1} \cdots {\rho_N}^{\alpha_N}$.

Dla dowolnych $a \geq 0,\ \rho \in \mathbb{C}^N$ wprowadzimy również następujący pomocniczy szereg formalny:

$$\Theta^{(a)}(\rho) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{\Gamma(1 + s \cdot \alpha + a)}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)} \rho^\alpha. \tag{4.6}$$

Posłuży on do udowodnienia wielu istotnych własności norm formalnych, w tym pozwoli wskazać związek tego pojęcia z rzędem Gevreya dowolnej funkcji.

Możemy w łatwy sposób zredukować indeks szeregu $\Theta^{(a)}(\rho)$. Dokładne szacowanie zostało zaprezentowane w Lemacie 4.1, z którego dowodem można się zapoznać w [25][2].

LEMAT 4.1 *Weźmy $b \geq 0$. Wówczas dla dowolnego $a > 0$ otrzymujemy*

$$\Theta^{(b)}(\rho) \ll e \left(\frac{e}{1 + a + b} \right)^a \Theta^{(a+b)}(\rho).$$

Definicja szeregu formalnego (4.6) posłuży teraz do oszacowania z góry normy formalnej dowolnej funkcji holomorficznej.

LEMAT 4.2 *Weźmy $f \in \mathcal{O}(D_R)$. Wówczas dla dowolnych $r < r' < R$ istnieje stała $h > 0$, dla której*

$$\sup_{z \in D_r} \|f(z)\|_\rho \ll C\Theta^{(0)}(h\rho),$$

przy czym $C = \sup_{z \in D_{r'}} |f(z)|$.

Dowód: Z definicji normy formalnej otrzymujemy

$$\|f(z)\|_\rho = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|\partial^\alpha_{\Gamma_s, z} f(z)|}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)} \rho^\alpha,$$

gdzie $s = (s_1, \ldots, s_N) \in [0, \infty)^N$. Ponadto, ponieważ $f \in \mathcal{O}\left(D_R\right)$, możemy oszacować każdy składnik powyższej sumy, korzystając ze Stwierdzenia 2.11. Dokładniej, dla wszystkich r, r' spełniających zależność $0 < r < r' < R$ i dowolnego wielowskaźnika α istnieje stała dodatnia $\tilde{h}$ taka, że

$$\sup_{z \in D_r} |\partial^\alpha_{\Gamma_s, z} f(z)| \leq \sup_{D_{r'}} |f(z)| \tilde{h}^{|\alpha|} \Gamma(1 + s \cdot \alpha).$$

Zatem możemy wywnioskować, że dla każdego $z \in D_r$

$$\|f(z)\|_\rho \ll \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{\sup_{D_{r'}} |f(z)| \tilde{h}^{|\alpha|} \Gamma(1 + s \cdot \alpha)}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)} \rho^\alpha = \sup_{D_{r'}} |f(z)| \Theta^{(0)}(\tilde{h}\rho).$$

Wobec tego wystarczy przyjąć $h = \tilde{h}$ i $C = \sup_{D_{r'}} |f(z)|$. ■

Korzystając z poprzedniej własności oraz Stwierdzenia 2.11 można także oszacować do-

[2]Własność jest tożsama z Lematem 4.3. z [25].

wolną moment-pochodną funkcji holomorficznej związaną z funkcją momentów $\Gamma_s(u)$.

LEMAT 4.3 *Niech $f \in \mathcal{O}(D_R)$ będzie funkcją spełniającą warunek*

$$\sup_{z \in D_r} \|f(z)\|_\rho \ll C\Theta^{(a)}(h\rho)$$

dla pewnych stałych $r \in (0, R)$, $C, h > 0$ i $a \geq 0$. Wówczas dla każdego wielowskaźnika $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ otrzymujemy

$$\sup_{z \in D_r} \|\partial_{\Gamma_s}^{\beta} f(z)\|_\rho \ll Ch^{|\beta|}\Theta^{(a+s\cdot\beta)}(h\rho).$$

Dowód: Ponieważ $\|f(z)\|_\rho \ll C\Theta^{(a)}(h\rho)$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ i $z \in D_r$, otrzymujemy

$$\sup_{z \in D_r} \frac{|\partial_{\Gamma_s,z}^{\alpha} f(z)|}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)} \leq \frac{Ch^{|\alpha|}\Gamma(1 + s \cdot \alpha + a)}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)},$$

co oznacza, że $\sup_{z \in D_r} |\partial_{\Gamma_s,z}^{\alpha} f(z)| \leq Ch^{|\alpha|}\Gamma(1 + s \cdot \alpha + a)$. Druga nierówność jest w szczególności prawdziwa dla wielowskaźnika $\tilde{\alpha} = \alpha + \beta$. Stąd:

$$\sup_{z \in D_r} \frac{|\partial_{\Gamma_s,z}^{\alpha+\beta} f(z)|}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)} \leq \frac{Ch^{|\alpha|+|\beta|}\Gamma(1 + s \cdot \alpha + s \cdot \beta + a)}{\Gamma(1 + s \cdot \alpha)}$$

dla każdego $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. ■

Kolejny lemat łączy normę formalną wyrazów szeregu formalnego z przestrzeni $\mathcal{O}(D_R)[[t]]$ z jego rzędem Gevreya.

LEMAT 4.4 *Rozważmy $f(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)t^n \in \mathcal{O}(D_R)[[t]]_{\bar{s}}$. Dla dowolnego $0 < r < R$ istnieją stałe dodatnie A, B, h takie, że*

$$\sup_{z \in D_r} \|f_n(z)\|_\rho \ll AB^n\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\bar{s}} \quad \textit{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód: Zauważmy, że ponieważ f jest rzędu Gevreya $\bar{s}$, dla dowolnego $r < r' < R$ istnieją stałe dodatnie A o B, dla których $\sup_{z \in D_{r'}} |f_n(z)| \leq AB^n n!^{\bar{s}}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. Możemy zatem skorzystać z Lematu 4.2. Otrzymujemy wtedy następującą zależność:

$$\sup_{z \in D_r} \|f_n(z)\|_\rho \ll \sup_{z \in D_{r'}} |f_n(z)|\Theta^{(0)}(h\rho) \ll AB^n n!^{\bar{s}}\Theta^{(0)}(h\rho).$$

■

4.3 Liniowy problem Cauchy'ego o współczynnikach zależnych od zmiennej czasowej

Rozważmy funkcje momentów m_0, $m_1, \ldots, m_N$ rzędów odpowiednio $s_0, s_1, \ldots, s_N$ oraz wprowadźmy oznaczenia $m = (m_1, \ldots, m_N)$ i $s = (s_1, \ldots, s_N)$. Dodatkowo załóżmy, że ciąg momentów $(m_0(n))_{n\geq 0}$ jest regularny. Przedmiotem dalszych rozważań będzie liniowy operator moment-różniczkowy P postaci

$$P(\partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1}, \ldots, \partial_{m_N,z_N}) = \partial_{m_0,t}^M + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} a_{j,\alpha}(t)\partial_{m_0,t}^j \partial_{m,z}^\alpha, \tag{4.7}$$

gdzie $\Lambda \subset \mathbb{N}_0^{1+N}$ jest pewnym skończonym zbiorem indeksów, a współczynniki $a_{j,\alpha}(t)$ są holomorficzne w pewnym otoczeniu zera.

Rozpoczynamy od zbadania diagramu Newtona $N(P)$ operatora zdefiniowanego przez (4.7). Na początek zauważmy, że diagram ten wyznaczony jest za pomocą następujących punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$:

$$(s_0 M, \, -M) \quad \text{i} \quad (s_0 j + s \cdot \alpha, \, \mathrm{ord}_t(a_{j,\alpha}) - j) \text{ dla wszystkich } (j, \alpha) \in \Lambda,$$

gdzie przez $\mathrm{ord}_t(f)$ rozumiemy rząd zera funkcji f w punkcie $t = 0$.

W przypadku, gdy na brzegu $N(P)$ znajduje się tylko jeden z tych punktów, $(s_0 M, -M)$, diagram ograniczony jest przez dwie prostopadłe półproste wychodzące z tego właśnie punktu. W przeciwnym przypadku istnieje indeks $(j^*, \alpha^*) \in \Lambda$, dla którego odcinek łączący $(s_0 M, -M)$ i $(s_0 j^* + s \cdot \alpha^*, \, \mathrm{ord}_t(a_{j^*,\alpha^*}) - j^*)$ jest pierwszym niepoziomym odcinkiem zawartym w brzegu $N(P)$. Oznaczmy tangens kąta nachylenia tego odcinka przez k_1. Wówczas możemy wartość k_1 wyznaczyć, korzystając ze wzoru:

$$k_1 = \frac{\mathrm{ord}_t(a_{j^*,\alpha^*}) - j^* + M}{s_0(j^* - M) + s \cdot \alpha^*}.$$

Ponadto w przypadku, gdy na brzeg $N(P)$ składają się wyłącznie dwie prostopadłe półproste, przyjmujemy $k_1 = +\infty$. Wobec powyższych faktów opisujemy wartość k_1 za pomocą następującej zależności:

$$\frac{1}{k_1} = \max\left\{0, \, \max_{(j,\alpha)\in\Lambda} \left\{ \frac{s_0(j - M) + s \cdot \alpha}{\mathrm{ord}_t\,(a_{j,\alpha}) - j + M} \right\}\right\}. \tag{4.8}$$

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego postaci:

$$\begin{cases} P(\partial_{m_0,t}, \partial_{m_1,z_1}, \ldots, \partial_{m_N,z_N})u(t,z) = f(t,z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \partial^j_{m_0,t}u(0,z) = \varphi_j(z) \text{ dla } 0 \le j < M \end{cases} \tag{4.9}$$

przy dodatkowych założeniach, że $\varphi_j \in \mathcal{O}(D_{\tilde{R}})$ dla $j = 0, \ldots, M-1$ i $f(t,z) \in \mathcal{O}(D_{\tilde{R}})[[t]]_{1/k_1}$ dla pewnego $\tilde{R} > 0$ oraz $a_{j,\alpha}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_{1/k_1}$ dla każdego $j, \alpha \in \Lambda$. Dodatkowo, aby zapewnić sobie jednoznaczność rozwiązania formalnego zagadnienia (4.9), zakładamy, że $\operatorname{ord}_t(a_{j,\alpha}) \ge \max\{0,\ j - M + 1\}$ dla każdego $(j,\alpha) \in \Lambda$.

Aby móc wykorzystać normy formalne do oszacowania rzędu Gevreya, należy tak zmodyfikować równanie, aby zamiast pochodnych ∂_{m_i,z_i} pojawiły się pochodne $\partial_{\Gamma_{s_i},z_i}$. W tym celu wykorzystamy złożenie transformat Borela rzędu 0 zadane wzorem:

$$\hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_s}{m},z} := \hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_{s_1}}{m_1},z_1} \ldots \hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_{s_N}}{m_N},z_N} \tag{4.10}$$

oraz Stwierdzenie 2.10. W rezultacie otrzymujemy równoważne równanie postaci:

$$\begin{cases} \partial^M_{m_0,t}v(t,z) + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} a_{j,\alpha}(t)\partial^j_{m_0,t}\partial^\alpha_{\Gamma_s,z}v(t,z) = g(t,z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \partial^j_{m_0,t}v(0,z) = \psi_j(z) \text{ for } 0 \le j < M \end{cases}, \tag{4.11}$$

gdzie $v = \hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_s}{m},z}u$, $g = \hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_s}{m},z}f$ i $\psi_j = \hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_s}{m},z}\varphi_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, M-1$.

Zauważmy, że dla pewnego promienia R prawdą jest, że $\psi_j \in \mathcal{O}(D_R)$ dla $j = 0, \ldots, M-1$ oraz $g \in \mathcal{O}(D_R)[[t]]_{1/k_1}$. Fakty te wynikają bezpośrednio z Definicji 3.1 oraz wypływających z niej wniosków.

Aby wykazać, że rozwiązanie formalne (4.9) jest rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$, najpierw udowodnimy analogiczny fakt dla (4.11). W tym celu przeprowadzony zostanie dowód technicznego lematu, który powiąże kolejne wyrazy szeregu formalnego $\hat{v}(t,z)$ z szeregiem zadanym przez (4.6).

LEMAT 4.5 *Rozważmy rozwiązanie formalne $\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)t^n$ zagadnienia Cauchy'ego (4.11). Niech ponadto $d = Ms_0 + \frac{1}{k_1}$. Wówczas dla dowolnego $r < R$ istnieją stałe $C, H, h > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ i $z \in D_r$ prawdziwa jest zależność:*

$$\|v_n(z)\|_\rho \ll \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}}\Theta^{(dn)}(h\rho). \tag{4.12}$$

Dowód: Dowód zostanie przeprowadzony metodą indukcji względem n. Dla $n \le M-1$ korzystamy z warunków początkowych danych w (4.11). Wówczas otrzymujemy dla M kolejnych wyrazów szeregu równość

$$v_n(z) = \frac{\psi_n(z)}{m_0(n)}$$

i teza jest spełniona z Lematów 4.1 i 4.2, ponieważ wszystkie ψ_n są holomorficzne.

Weźmy $n \geq M$ i załóżmy, że

$$\|v_i(z)\|_\rho \ll \frac{CH^i}{i!^{Ms_0}} \Theta^{(di)}(h\rho)$$

dla wszystkich $i \leq n-1$. Wykażemy, że zależność ta jest prawdziwa też dla $i = n$. Po podstawieniu wzoru na $\hat{v}(t,z)$ do równania otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)\partial_{m_0,t}^M t^n + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} a_{j,\alpha}(t) \sum_{n=0}^{\infty} (\partial_{\Gamma_s,z}^\alpha v_n(z))\partial_{m_0,t}^j t^n = g(t,z).$$

Efektem wykonania różniczkowania względem t i przemnożenia obu stron otrzymanej w ten sposób równości przez t^M jest zależność:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)\frac{m_0(n)}{m_0(n-M)}t^n + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} t^{M-j}a_{j,\alpha}(t)\sum_{n=0}^{\infty} \partial_{\Gamma_s,z}^\alpha v_n(z)\frac{m_0(n)}{m_0(n-j)}t^n = t^M g(t,z).$$

W kolejnym kroku dokonujemy podstawień $t^M g(t,z) = \sum_{n=M}^{\infty} g_n(z)t^n$ oraz $t^{M-j}a_{j,\alpha}(t) = \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{\infty} c_{j,\alpha,p}t^p$ dla każdego $(j,\alpha) \in \Lambda$, gdzie $q_{j,\alpha} = \operatorname{ord}_t(a_{j,\alpha}) - j + M$. W ten sposób otrzymujemy wzór rekurencyjny na kolejne wyrazy $v_n(z)$ dla $n \geq M$:

$$v_n(z) = \frac{m_0(n-M)}{m_0(n)}\left[g_n(z) - \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda}\sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n-j} c_{j,\alpha,p}\frac{m_0(n-p)}{m_0(n-p-j)}\partial_{\Gamma_s,z}^\alpha v_{n-p}(z)\right]. \tag{4.13}$$

Zauważmy, że $q_{j,\alpha} \geq 1$ dla każdego $(j,\alpha) \in \Lambda$ i $\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)t^n$ jest wyznaczone jednoznacznie przez (4.13).

Z założenia, że wszystkie $a_{j,\alpha}$ są rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$, wynika istnienie pewnych stałych dodatnich $A_{j,\alpha},\ B$, dla których dla dowolnego $p \geq q_{j,\alpha}$ mamy

$$|c_{j,\alpha,p}| \leq A_{j,\alpha}B^p(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}.$$

Ponadto z Lematu 4.4 wnioskujemy, że dla pewnych $K, h > 0$ dla każdego $z \in D_r$ zachodzi

$$\|g_n(z)\|_\rho \ll KB^n\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\frac{1}{k_1}}.$$

Wobec tego dla każdego $z \in D_r$ zachodzi:

$$\|v_n(z)\|_\rho \ll \frac{(n-M)!^{s_0}}{a^M n!^{s_0}}\Big[KB^n\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\frac{1}{k_1}} + \\ + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda}\sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} A_{j,\alpha}A^jB^p(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}\frac{(n-p)!^{s_0}}{(n-p-j)!^{s_0}}\|\partial^\alpha_{\Gamma_s,z}v_{n-p}(z)\|_\rho\Big].$$

Dzięki Lematowi 4.3 i założeniu indukcyjnemu szacujemy normę formalną wyrazu dowolnej pochodnej $v_{n-p}(z)$ następująco:

$$\|\partial^\alpha_{\Gamma_s,z}v_{n-p}(z)\|_\rho \ll \frac{CH^{n-p}h^{|\alpha|}}{(n-p)!^{Ms_0}}\Theta^{(d(n-p)+s\cdot\alpha)}(h\rho) \quad \text{dla każdego} \quad z\in D_r,$$

z czego wynika, że

$$\|v_n(z)\|_\rho \ll \frac{(n-M)!^{s_0}}{a^M n!^{s_0}}\Big[KB^n\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\frac{1}{k_1}} + \\ + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda}\sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \frac{A_{j,\alpha}A^jB^p(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}(n-p)!^{s_0}CH^{n-p}h^{|\alpha|}}{(n-p-j)!^{s_0}(n-p)!^{Ms_0}}\Theta^{(d(n-p)+s\cdot\alpha)}(h\rho)\Big].$$

Następnie korzystamy z Lematu 8.4 i uzyskujemy szacowanie $v_n(z)$ postaci:

$$\|v_n(z)\|_\rho \ll \frac{M^{Ms_0}}{a^M n^{Ms_0}}\left[KB^n\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\frac{1}{k_1}} + I\right],$$

przy czym I oznacza wyrażenie

$$I = \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda}\sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \frac{A_{j,\alpha}A^jB^p(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}(n-p)!^{s_0}CH^{n-p}h^{|\alpha|}}{(n-p-j)!^{s_0}(n-p)!^{Ms_0}}\Theta^{(d(n-p)+s\cdot\alpha)}(h\rho).$$

Z Lematu 4.1 wnioskujemy, że:

$$\begin{aligned}\frac{KM^{Ms_0}B^n}{a^Mn^{Ms_0}}\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\frac{1}{k_1}} &= \frac{KM^{Ms_0}B^n}{a^M}\frac{(n^{s_0})^{Mn-M}}{(n^{s_0})^{Mn}}\Theta^{(0)}(h\rho)n!^{\frac{1}{k_1}} \ll \\ &\ll \frac{KM^{Ms_0}B^n(n^n)^{Ms_0+\frac{1}{k_1}}}{a^Mn!^{Ms_0}}\Theta^{(0)}(h\rho) = \\ &= \frac{KM^{Ms_0}B^n}{a^Mn!^{Ms_0}}n^{dn}\Theta^{(0)}(h\rho) \ll \\ &\ll \frac{KM^{Ms_0}B^n}{a^Mn!^{Ms_0}}e\left(\frac{en}{1+dn}\right)^{dn}\Theta^{(dn)}(h\rho) \ll \\ &\ll \frac{KM^{Ms_0}e}{a^Mn!^{Ms_0}}\left(\frac{e^dB}{d^d}\right)^n\Theta^{(dn)}(h\rho).\end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, wystarczy dobrać $C \geq \frac{2KM^{Ms_0}e}{a^M}$ oraz $H \geq \frac{e^d B}{d^d}$, aby $\frac{1}{2}\frac{CH^n}{n!^{Ms_0}}\Theta^{(dn)}(h\rho)$ majoryzowało ostatnie wyrażenie. Pozostaje nam zatem uzyskać analogiczny rezultat dla $\frac{M^{Ms_0}}{a^M n^{Ms_0}} I$.

Zauważmy, że

$$\frac{(n-p)!}{(n-p-j)!} \leq n^j \quad \text{i} \quad \frac{1}{(n-p)!} \leq \frac{n^p}{n!},$$

wobec czego

$$\frac{(n-p)!^{s_0}}{(n-p-j)!^{s_0}} \frac{1}{(n-p)!^{Ms_0}} \leq \frac{n^{s_0(Mp+j)}}{n!^{Ms_0}}.$$

Ponadto dla $q_{j,\alpha} \leq p \leq n$ prawdziwe jest oszacowanie

$$(p - q_{j,\alpha})!^{1/k_1} \leq n^{(p-q_{j,\alpha})/k_1}.$$

Z definicji wartości k_1 wynika także zależność

$$s_0(j - M) \leq \frac{q_{j,\alpha}}{k_1} - s \cdot \alpha \quad \text{dla każdego} \quad (j, \alpha) \in \Lambda.$$

Wykorzystując powyższe fakty, otrzymujemy:

$$\frac{1}{n^{Ms_0}} I \ll \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \frac{A_{j,\alpha} A^j h^{|\alpha|} B^p}{H^p} n^{s_0(Mp+j-M)+(p-q_{j,\alpha})/k_1} \cdot$$
$$\cdot\, \Theta^{(d(n-p)+s\cdot\alpha)}(h\rho) \ll$$
$$\ll \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \frac{A_{j,\alpha} A^j h^{|\alpha|} B^p}{H^p} n^{dp - s\cdot\alpha} \Theta^{(d(n-p)+s\cdot\alpha)}(h\rho).$$

Zatem z Lematu 4.1 wynika, że

$$\frac{M^{Ms_0}}{a^M n^{Ms_0}} I \ll \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \frac{A_{j,\alpha} A^j h^{|\alpha|} B^p}{a^M M^{-Ms_0} H^p} e \left(\frac{en}{1+dn}\right)^{dp - s\cdot\alpha} \Theta^{(dn)}(h\rho) \ll$$
$$\ll \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{\infty} \frac{eA_{j,\alpha} A^j h^{|\alpha|}}{a^M M^{-Ms_0}} \left(\frac{d}{e}\right)^{s\cdot\alpha} \left(\frac{e^d B}{H d^d}\right)^p \Theta^{(dn)}(h\rho) \ll$$
$$\ll \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}} \Theta^{(dn)}(h\rho) \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \frac{eA_{j,\alpha} A^j h^{|\alpha|}}{a^M M^{-Ms_0}} \left(\frac{d}{e}\right)^{s\cdot\alpha} \frac{\left(\frac{e^d B}{H d^d}\right)^{q_{j,\alpha}}}{1 - \frac{e^d B}{H d^d}}.$$

Pozostaje jedynie zauważyć, że suma po prawej stronie ostatniej zależności może zostać ograniczona przez $\frac{1}{2}$ dla dostatecznie dużych wartości H. ∎

Z Lematu 4.5 wynika następujące stwierdzenie:

STWIERDZENIE 4.1 *Niech* $\hat{v}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z) t^n$ *będzie rozwiązaniem formalnym (4.11).*

Wówczas $\hat{v}(t,z)$ jest rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$ względem zmiennej t.

Dowód: Na początek zauważmy, że $|v_n(z)| = \|v_n(z)\|_0$. Wobec tego z Lematu 4.5 wynika, że

$$|v_n(z)| \leq \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}}\Theta^{(dn)}(0) = \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}}\Gamma(1+dn) \leq \\ \leq \frac{CH^n}{n!^{Ms_0}}BL^n n!^d = \tilde{C}\tilde{H}^n n!^{\frac{1}{k_1}}.$$

■

Naszym celem jest uzyskanie analogicznego wyniku dla rozwiązania formalnego problemu (4.9). Aby otrzymać ten wynik, wykorzystamy teorię majorant i udowodnimy silniejszą wersję Stwierdzenia 4.1.

STWIERDZENIE 4.2 *Niech $\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)t^n$ będzie rozwiązaniem formalnym (4.11) i wprowadźmy oznaczenie $M[v_n](z) := \sum_{|l|=0}^{\infty} |v_{nl}|z^l$, gdzie $l \in \mathbb{N}_0^N$ są wielowskaźnikami. Wówczas dla dowolnego promienia $r < R$ istnieją stałe dodatnie C, H, dla których prawdziwa jest nierówność:*

$$\sup_{z\in D_r^N} |M[v_n](z)| \leq CH^n n!^{\frac{1}{k_1}} \quad \textit{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie d oznacza tę samą wartość, co w Lemacie 4.5.

Dowód: Jak zostało zauważone w [13], w celu udowodnienia powyższego faktu należy powtórzyć rozumowanie z dowodów Lematu 4.5 i Stwierdzenia 4.1, zastępując przy tym dane początkowe $\psi_n(z)$ oraz wszystkie współczynniki $g_n(z)$ ich majorantami $M[\psi_n](z)$ i $M[g_n](z)$. Dodatkowo zamiast (4.13) należy wykorzystać analogiczne oszacowanie

$$M[v_n](z) \ll \frac{m_0(n-M)}{m_0(n)}\Big[M[g_n](z)+ \\ + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda}\sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} |c_{j,\alpha,p}|\frac{m_0(n-p)}{m_0(n-p-j)}\partial^{\alpha}_{\Gamma_s,z}M[v_{n-p}](z)\Big].$$

■

Wykorzystując wszystkie wyżej przedstawione własności, możemy przejść do sformułowania i udowodnienia twierdzenia określającego rząd Gevreya rozwiązania formalnego zagadnienia (4.9).

TWIERDZENIE 4.1 *Rozważmy $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)t^n$ będące rozwiązaniem formalnym zagadnienia Cauchy'ego (4.9) ze wszystkimi wcześniej wymienionymi założeniami. Wówczas $\hat{u}(t,z)$ jest rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$ względem zmiennej t.*

Dowód: Należy udowodnić, że istnieje promień $\tilde{R} > 0$ taki, że dla dowolnego $0 < r < \tilde{R}$ istnieją stałe dodatnie C oraz H, dla których spełniona jest zależność

$$\sup_{z \in D_r^N} |u_n(z)| \leq C H^n n!^{\frac{1}{k_1}} \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Możemy wykorzystać wcześniej zdefiniowane złożenie transformat Borela $\hat{\mathcal{B}}_{\frac{\Gamma_s}{m},z}$, aby uzależnić kolejne $u_n(z)$ od $v_n(z)$.

Otrzymujemy wówczas zależność $v_n(z) = \mathcal{B}_{\frac{\Gamma_s}{m},z} u_n(z)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Z (2.4) wynika istnienie stałej $B > 0$ spełniającej

$$\frac{\Gamma_s(l)}{m(l)} = \frac{\Gamma_{s_1}(l_1)}{m_1(l_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma_{s_N}(l_N)}{m_N(l_N)} \leq B^{|l|} \quad \text{dla każdego} \quad l \in \mathbb{N}_0^N,$$

skąd otrzymujemy

$$u_n(z) \ll M[u_n](z) \ll \sum_{|l|=0}^{\infty} \frac{|u_{nl}| B^{|l|}}{\frac{\Gamma_s(l)}{m(l)}} z^l = M[v_n](Bz).$$

Ze Stwierdzenia 4.2 wynika istnienie stałych dodatnich $C,\ H$ takich, że

$$|u_n(z)| \leq |M[v_n](Bz)| \leq C H^n n!^{\frac{1}{k_1}}$$

dla dowolnego $z \in D_r^N$, gdzie $r < \frac{R}{B}$. Stąd wystarczy wziąć $\tilde{R} = \frac{R}{B}$. ■

ROZDZIAŁ 5

Równania liniowe o zmiennych współczynnikach

W tym rozdziale skupimy się na analizie własności Gevreya równań moment-różniczkowych cząstkowych o zmiennych współczynnikach. Zaprezentowane wyniki pochodzą z [22], a bezpośrednią ich inspiracją były prace W. Balsera i M. Loday-Richaud [2] oraz P. Remy [18, 19]. We wszystkich wspomnianych artykułach podstawę rozważań stanowiły normy Nagumo.

DEFINICJA 5.1 Rozważmy funkcję $f \in \mathcal{O}(D_R)$ dla pewnego dysku $D_R \subset \mathbb{C}$. Niech ponadto $p \geq 0$ i $0 < r < R$. Wówczas *normę Nagumo*[1] $\|f(z)\|_{p,r}$ definiujemy następująco:

$$\|f(z)\|_{p,r} = \sup_{z \in D_r} |f(z)(r - |z|)^p|.$$

Dzięki tak zdefiniowanej normie możemy w szczególności szacować normę pochodnej funkcji przez normę samej funkcji bez konieczności zmniejszania rozpatrywanej dziedziny, co pokazuje następujące stwierdzenie:

STWIERDZENIE 5.1 *Niech $f, g \in \mathcal{O}(D_R)$ dla pewnego $R > 0$. Ustalmy ponadto $p, q \geq 0$ oraz $0 < r < R$. Wówczas:*

1) $\|f(z)g(z)\|_{p+q,r} \leq \|f(z)\|_{p,r}\|g(z)\|_{q,r}$,

2) istnieje stała $C > 0$, dla której $\|\partial_z f(z)\|_{p+1,r} \leq C\|f(z)\|_{p,r}$,

3) $|f(z)| \leq \|f(z)\|_{p,r}(r - |z|)^{-p}$ *dla każdego $z \in D_r$.*

Dowody wspomnianych wyżej własności zostały opublikowane w [4].

Do badań nad równaniami moment-różniczkowymi konieczne było zmodyfikowanie Definicji 5.1 przy jednoczesnym zachowaniu własności ze Stwierdzenia 5.1.

---

[1]Definicja przytoczona za [22]. Więcej szczegółów na temat norm Nagumo między innymi w [17] i [4].

5.1 Zmodyfikowane normy Nagumo

Dla dowolnego $a \in \mathbb{N}_0$ i $s \geq 0$ definiujemy szereg potęgowy $\Theta_s^{(a)}(x)$ jako

$$\Theta_s^{(a)}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+a)!^s}{n!^s} x^n. \tag{5.1}$$

DEFINICJA 5.2 Dla każdego $s \in [1, \infty)^N$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $0 < r < R$ i $z \in D_r$ *zmodyfikowaną normą Nagumo* $\|f(z)\|_{\alpha,r,s}$ *funkcji* $f \in \mathcal{O}(D_R)$ nazywamy:

$$\|f(z)\|_{\alpha,r,s} := \inf \left\{ A \geq 0 : \; f(z) \ll A \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{r^{\alpha_i}(\alpha_i - 1)!^{s_i}} \Theta_{s_i}^{(\alpha_i - 1)} \left(\frac{z_i}{r} \right), \; z \in D_r \right\}. \tag{5.2}$$

STWIERDZENIE 5.2 *Dla* $N = 1$ *i* $s = 1$ *zmodyfikowana norma Nagumo odpowiada standardowej normie Nagumo.*

Dowód: Ustalmy $q \in \mathbb{N}$ oraz $0 < r < R$. Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(D_R)$ wzór (5.2) przyjmuje postać:

$$\|f(z)\|_{q,r,1} := \inf \left\{ A \geq 0 : \; f(z) \ll A \frac{1}{r^q (q-1)!} \Theta_1^{(q-1)} \left(\frac{z}{r} \right), \; z \in D_r \right\}.$$

Ponadto zauważmy, że

$$\Theta_1^{(q-1)} \left(\frac{z}{r} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q-1)!}{n!} \frac{z^n}{r^n} = \frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}u^{q-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n \right) \Bigg|_{u = r^{-1} z}.$$

Wobec tego

$$\sup_{|z|<\rho} |f(z)| \leq \frac{A}{r^q (q-1)!} \frac{r^q (q-1)!}{(r - |z|)^q} = \frac{A}{(r-|z|)^q} \text{ dla każdego } \rho < r.$$

Stąd wnioskujemy już, że $A \geq (r-\rho)^q \sup_{|z|<\rho} |f(z)|$. ■

UWAGA 5.1 Zauważmy, że $\| \cdot \|_{\alpha,r,s}$ jest normą przestrzeni $\mathcal{O}(D_R)$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $0 < r < R$ i $s \in [1, \infty)^N$.

UWAGA 5.2 Dla $0 \in \mathbb{N}_0^N$ oraz dowolnych $0 < r < R$ i $s \in [1, \infty)^N$ definiujemy $\|f(z)\|_{0,r,s}$ jako standardową normę w przestrzeni ℓ_1. Dokładniej, jeśli $f(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} f_\gamma z^\gamma$, to

$$\|f(z)\|_{0,r,s} = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} |f_\gamma| \, r^{|\gamma|}.$$

Kolejne kilka lematów pokazuje, że zmodyfikowane normy Nagumo mają interesujące nas własności. W szczególności Lemat 5.1 pozwala szacować normę iloczynu funkcji przez iloczyn norm, a Lemat 5.2 – normę pochodnej przez normę samej funkcji. W obu przypadkach nie zachodzi konieczność ograniczania rozpatrywanej dziedziny.

W dalszej części tekstu dla większej przejrzystości normy zdefiniowane przez (5.2) będziemy nazywać krótko „normami Nagumo”.

LEMAT 5.1 *Weźmy funkcje $f, g \in \mathcal{O}(D_R)$ oraz wielowskaźniki $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^N$. Wówczas norma Nagumo zdefiniowana za pomocą wzoru* (5.2) *ma następujące własności:*

(i) $\|f(z) \cdot g(z)\|_{\alpha+\beta,r,s} \le \|f(z)\|_{\alpha,r,s} \|g(z)\|_{\beta,r,s}$,

(ii) $\|f(z) \cdot g(z)\|_{\alpha,r,s} \le \|f(z)\|_{\alpha,r,s} \|g(z)\|_{0,r,s}$.

Dowód: Zaczniemy od wykazania prawdziwości (i). Niech $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^N$ będą dowolnymi, ustalonymi wielowskaźnikami. Z definicji normy Nagumo oraz szeregu $\Theta_s^{(a)}(x)$ otrzymujemy

$$f(z) \ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha_i-1}{n}^{s_i} \frac{z_i^n}{r^n}$$

oraz

$$g(z) \ll \frac{\|g(z)\|_{\beta,r,s}}{r^{|\beta|}} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\beta_i-1}{n}^{s_i} \frac{z_i^n}{r^n}.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$f(z) \cdot g(z) \ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s} \|g(z)\|_{\beta,r,s}}{r^{|\alpha|+|\beta|}} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+\alpha_i-1}{k}^{s_i} \binom{n-k+\beta_i-1}{n-k}^{s_i} \frac{z_i^n}{r^n}.$$

Zauważmy, że dla dowolnych $a, b > 0$ i $s \ge 1$ prawdziwa jest nierówność $a^s + b^s \le (a+b)^s$. Wykorzystując ten fakt oraz Lemat 8.3, otrzymujemy

$$f(z) \cdot g(z) \ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s} \|g(z)\|_{\beta,r,s}}{r^{|\alpha|+|\beta|}} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha_i+\beta_i-1}{k}^{s_i} \frac{z_i^n}{r^n}.$$

Aby udowodnić prawdziwość zależności (ii), najpierw należy zauważyć, że $g(z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} g_\gamma z^\gamma$. Dalsze postępowanie jest analogiczne do dowodu własności (i). Dokładniej mówiąc, mamy:

$$f(z) \cdot g(z) \ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \left(\prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha_i-1}{n}^{s_i} \frac{z_i^n}{r^n} \right) \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} |g_\gamma|\, r^{|\gamma|} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}} \right) =$$

$$= \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \prod_{i=1}^{N} \binom{\gamma_i+\alpha_i-1}{\gamma_i}^{s_i} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}} \right) \left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} |g_\gamma|\, r^{|\gamma|} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}} \right) =$$

$$= \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \sum_{\gamma'\leq\gamma} \prod_{i=1}^{N} \binom{\gamma_i' + \alpha_i - 1}{\gamma_i'}^{s_i} |g_{\gamma-\gamma'}|\, r^{|\gamma-\gamma'|} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}}.$$

Z faktu, że dla dowolnych $p \geq 0$ i $k \leq n$ prawdziwa jest nierówność $\binom{k+p}{k} \leq \binom{n+p}{n}$, wnioskujemy, że

$$f(z) \cdot g(z) \ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \prod_{i=1}^{N} \binom{\gamma_i + \alpha_i - 1}{\gamma_i}^{s_i} \left(\sum_{\gamma'\leq\gamma} |g_{\gamma-\gamma'}|\, r^{|\gamma-\gamma'|} \right) \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}} \ll$$
$$\ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}\|g(z)\|_{0,r,s}}{r^{|\alpha|}} \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \prod_{i=1}^{N} \binom{\gamma_i + \alpha_i - 1}{\gamma_i}^{s_i} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}},$$

co kończy dowód własności (ii). ■

LEMAT 5.2 *Niech $\alpha \in \mathbb{N}^N$ i niech e_j oznacza wielowskaźnik długości N taki, że na jego j-tym miejscu znajduje się 1, a na wszystkich pozostałych zera. Załóżmy, że $m_1, \ldots, m_N$ to regularne ciągi momentów rzędów odpowiednio $s_1, \ldots, s_N$. Wówczas*

$$\|\partial_{m_j,z_j} f(z)\|_{\alpha+e_j,r,s} \leq C\alpha_j^{s_j} \|f(z)\|_{\alpha,r,s} \quad \textit{dla} \quad j = 1, \ldots, N.$$

Dowód: Z definicji regularności ciągu momentów istnieją stałe dodatnie c oraz C takie, że

$$c(n+1)^{s_j} \leq \frac{m_j(n+1)}{m_j(n)} \leq C(n+1)^{s_j} \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0,\ j = 1,\ \ldots,\ N.$$

Dla dowolnego ustalonego $\alpha \in \mathbb{N}^N$ otrzymujemy:

$$\partial_{m_j,z_j} f(z) \ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{\alpha_j}(\alpha_j-1)!^{s_j}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha_j)!^{s_j} m_j(n+1)}{(n+1)!^{s_j} m_j(n)} \frac{z_j^n}{r^{n+1}} \prod_{i\neq j} \frac{1}{r^{\alpha_i}(\alpha_i-1)!^{s_i}} \Theta_{s_i}^{(\alpha_i-1)}\left(\frac{z_i}{r}\right) \ll$$
$$\ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{\alpha_j+1}(\alpha_j-1)!^{s_j}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(n+\alpha_j)!^{s_j}(n+1)^{s_j}}{(n+1)!^{s_j}} \frac{z_j^n}{r^n} \prod_{i\neq j} \frac{1}{r^{\alpha_i}(\alpha_i-1)!^{s_i}} \Theta_{s_i}^{(\alpha_i-1)}\left(\frac{z_i}{r}\right) =$$
$$= \frac{C\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{\alpha_j+1}(\alpha_j-1)!^{s_j}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha_j)!^{s_j}}{n!^{s_j}} \frac{z_j^n}{r^n} \prod_{i\neq j} \frac{1}{r^{\alpha_i}(\alpha_i-1)!^{s_i}} \Theta_{s_i}^{(\alpha_i-1)}\left(\frac{z_i}{r}\right) =$$
$$= C\alpha_j^{s_j} \|f(z)\|_{\alpha,r,s} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{r^{\tilde{\alpha}_i}(\tilde{\alpha}_i-1)!^{s_i}} \Theta_{s_i}^{(\tilde{\alpha}_i-1)}\left(\frac{z_i}{r}\right),$$

przy czym $\tilde{\alpha} = \alpha + e_j$. Stąd $\left\|\partial_{m_j,z_j} f(z)\right\|_{\tilde{\alpha},r,s} \leq C\alpha_j^{s_j} \|f(z)\|_{\alpha,r,s}$. ■

Własność norm Nagumo przedstawiona w Lemacie 5.3 pozwala nam zmniejszyć indeks normy bez konieczności zmiany dziedziny. Okaże się ona przydatna w dalszej części tego rozdziału, w szczególności w dowodzie jego głównego wyniku.

LEMAT 5.3 *Niech* $f \in \mathcal{O}(D_R)$. *Wówczas dla dowolnych* $0 < r < R$, $\alpha \in \mathbb{N}^N \cup \{0\}$ *oraz* $\beta \in \mathbb{N}^N$ *prawdziwa jest nierówność:*

$$\|f(z)\|_{\alpha+\beta,r,s} \leq r^{|\beta|}\|f(z)\|_{\alpha,r,s}.$$

Dowód: Weźmy $g(z)$ stałą równą 1. Wówczas z Lematu 5.1 otrzymujemy $\|f(z)\|_{\alpha+\beta,r,s} \leq \|g(z)\|_{\beta,r,s}\|f(z)\|_{\alpha,r,s}$. Następnie zauważmy, że

$$1 \ll \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}}$$

oraz, niezależnie od wyboru $\varepsilon \in (0,\, 1)$,

$$1 \not\ll (1-\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}}.$$

Stąd $1 = \frac{\|1\|_{\beta,r,s}}{r^{|\beta|}}$, a zatem $\|1\|_{\beta,r,s} = r^{|\beta|}$. ■

Kolejne dwa lematy demonstrują związek norm Nagumo z rzędem Gevreya funkcji.

LEMAT 5.4 *Rozważmy* $f(t,z) \in \left(\mathcal{O}(D_R) \cap C\left(\bar{D}_R^N\right)\right)[[t]]_w$ *dla pewnego* $w \geq 0$ *oraz przyjmijmy, że* $f(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)t^n$ *Wówczas dla dowolnych* $0 < r < R$ *i* $\alpha \in \mathbb{N}^N$ *istnieją stałe dodatnie* A *oraz* B*, dla których spełniona jest nierówność:*

$$\|f_n(z)\|_{n\alpha,r,s} \leq AB^n n!^w \quad \textit{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód: Zauważmy, że istnieją stałe $A_0,\, B_0 > 0$ spełniające

$$\sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)| \leq A_0 B_0^n n!^w \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Możemy wykorzystać nierówność Cauchy'ego do oszacowania wyrazów szeregu $f_n(z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} f_{n,\gamma}z^\gamma$. Dokładniej, dla dowolnych $0 < r < R$ i $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ otrzymujemy

$$|f_{n,\gamma}| \leq \frac{\sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)|}{r^{|\gamma|}}.$$

Wobec tego

$$f_n(z) \ll \sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)| \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{z^\gamma}{r^{|\gamma|}}.$$

Dla dowolnego $n \geq 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_n(z) &\ll \sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)| \prod_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n\alpha_i-1}{k}^{s_i} \frac{z_i^k}{r^k} \ll \\ &\ll \sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)| \prod_{i=1}^{N} \frac{R^{n\alpha_i}}{r^{n\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n\alpha_i-1}{k}^{s_i} \frac{z_i^k}{r^k} = \\ &= \sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)|\, R^{n|\alpha|} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{r^{n\alpha_i}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n\alpha_i-1}{k}^{s_i} \frac{z_i^k}{r^k}. \end{aligned}$$

Stąd już wnioskujemy, że $\|f_n(z)\|_{n\alpha,r,s} \leq R^{n|\alpha|} \sup_{\zeta\in D_r} |f_n(\zeta)| \leq A_0(B_0R^{|\alpha|})^n n!^w$.

Rozważmy przypadek, gdy $n = 0$. Wtedy $f_0(z)$ możemy zapisać w postaci szeregu

$$f_0(z) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} f_{0,\gamma} z^\gamma.$$

Wówczas

$$|f_{0,\gamma}| \leq \frac{\sup_{\zeta\in D_R} |f_0(\zeta)|}{R^{|\gamma|}} \quad \text{dla każdego} \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^N$$

oraz

$$\|f_0(z)\|_{0,r,s} \leq \sup_{\zeta\in D_R} |f_0(\zeta)| \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{r^k}{R^k} \leq \sup_{\zeta\in D_R} |f_0(\zeta)| \frac{R^N}{(R-r)^N}.$$

Wystarczy zatem wziąć $A = \max\left\{A_0,\, \sup_{\zeta\in D_R} |f_0(\zeta)| \frac{R^N}{(R-r)^N}\right\}$ i $B = B_0R^{|\alpha|}$. ■

LEMAT 5.5 *Weźmy $f \in \mathcal{O}(D_R)$. Wówczas dla dowolnych $0 < \rho < r < R$ istnieje stała dodatnia A taka, że dla każdego wielowskaźnika $\alpha \in \mathbb{N}^N \cup \{0\}$ następująca nierówność jest prawdziwa:*

$$\sup_{z\in D_\rho} |f(z)| \leq A^{|\alpha|} \|f(z)\|_{\alpha,r,s}.$$

Dowód: W przypadku, gdy $\alpha = 0$, wystarczy zauważyć, że

$$\sup_{z\in D_\rho} |f(z)| = \left| \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} f_\gamma \prod_{i=1}^{N} \rho^{\gamma_i} e^{i\theta_i\gamma_i} \right| \leq \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} |f_\gamma|\, \rho^{|\gamma|} \leq \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} |f_\gamma|\, r^\gamma = \|f(z)\|_{0,r,s}$$

dla pewnych $\theta_1, \ldots, \theta_N \in [0,\, 2\pi)$.

Zanim przejdziemy do dowodu dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}^N$, zauważmy najpierw, że dla dowolnych $a,\, b \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ prawdziwa jest zależność:

$$\binom{n+p-1}{n} a^n b^{p-1} \leq (a+b)^{n+p-1}. \tag{5.3}$$

Ustalmy zatem $\varepsilon > 0$ dostatecznie małe, aby $\rho(1+\varepsilon)^{|s|-N} < r$. Wówczas zależność (5.3) jest w szczególności prawdziwa dla $a,\ b$ takich, że $a+b=1$ oraz $a^{-1} = 1+\varepsilon$. Stąd dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ i dla $i = 1, \ldots, N$ otrzymujemy

$$\binom{n+\alpha_i-1}{n} \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\alpha_i-1} (1+\varepsilon)^n .$$

Wykorzystamy ten fakt do zmajoryzowania $f(z)$.

$$\begin{aligned} f(z) &\ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha_i-1}{n}^{s_i} \frac{z_i^n}{r^n} \ll \\ &\ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{(\alpha_i-1)(s_i-1)} (1+\varepsilon)^{n(s_i-1)} \binom{n+\alpha_i-1}{n} \frac{z_i^n}{r^n} \ll \\ &\ll \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{s\cdot\alpha} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha_i-1}{n} \left(\frac{z_i\,(1+\varepsilon)^{s_i-1}}{r}\right)^n . \end{aligned}$$

Powyższe szacowania są w szczególności prawdziwe dla wszystkich $z \in D_\rho$. Stąd wnioskujemy, że

$$\sup_{z\in D_\rho} |f(z)| \leq \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{s\cdot\alpha} \prod_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha_i-1}{n} \left(\frac{\rho\,(1+\varepsilon)^{s_i-1}}{r}\right)^n .$$

Dodatkowo, dla $i = 1, \ldots, N$ otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha_i-1)!}{n!} \left(\frac{\rho\,(1+\varepsilon)^{s_i-1}}{r}\right)^n = \frac{d^{\alpha_i-1}}{du^{\alpha_i-1}} \left.\frac{1}{1-u}\right|_{u=\rho(1+\varepsilon)^{s_i-1}r^{-1}} .$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sup_{z\in D_\rho} |f(z)| &\leq \frac{\|f(z)\|_{\alpha,r,s}}{r^{|\alpha|}} \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{s\cdot\alpha} \frac{r^{|\alpha|}}{[r-(1+\varepsilon)^{|s|-N}\rho]^{|\alpha|}} \leq \\ &\leq \|f(z)\|_{\alpha,r,s} \left\{\frac{(1+\varepsilon)^{|s|}}{\varepsilon^{|s|}\,[r-(1+\varepsilon)^{|s|-N}\rho]}\right\}^{|\alpha|} . \end{aligned}$$

Wobec tego wystarczy wziąć $A = \max\left\{1,\ \frac{(1+\varepsilon)^{|s|}}{\varepsilon^{|s|}\left[r-(1+\varepsilon)^{|s|-N}\rho\right]}\right\}$. ■

5.2 Liniowy problem Cauchy'ego o zmiennych współczynnikach

Niniejszy podrozdział w całości oparty został na [22]. Zdefiniowane wcześniej zmodyfikowane normy Nagumo posłużą nam do analizy rzędu Gevreya rozwiązania formalnego następującego zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{cases} P\left(\partial_{m_0,t}, \partial_{m,z}\right) u(t,z) = f(t,z) \\ \qquad\qquad \partial^j_{m_0,t} u(0,z) = \varphi_j(z) \text{ dla } 0 \leq j < M \end{cases} \tag{5.4}$$

dla pewnego liniowego operatora moment-różniczkowego zadanego za pomocą wzoru

$$P\left(\partial_{m_0,t}, \partial_{m,z}\right) = \partial^M_{m_0,t} + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} a_{j,\alpha}(t,z)\partial^j_{m_0,t}\partial^\alpha_{m,z}, \tag{5.5}$$

gdzie $\Lambda \subset \mathbb{N}_0^{1+N}$ jest skończonym zbiorem indeksów. Dodatkowo zakładamy, że $m_0, m_1, \ldots, m_N$ są regularnymi ciągami momentów rzędów odpowiednio $s_0, s_1, \ldots, s_N$, dla $j = 1, \ldots, N$ mamy $s_j \geq 1$ oraz $\operatorname{ord}_t\left(a_{j,\alpha}\right) \geq \max\{0, j - M + 1\}$ dla wszystkich $(j,\alpha) \in \Lambda$.

UWAGA 5.3 Ostatni z wymienionych wyżej warunków gwarantuje nam jednoznaczność rozwiązania (5.4).

Możemy przystąpić do sformułowania głównego wyniku tego rozdziału:

TWIERDZENIE 5.1 *Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego zdefiniowane za pomocą (5.4) z wymienionymi powyżej założeniami. Dodatkowo przyjmijmy, że $f(t,z) \in \mathcal{O}\left(D_R\right)[[t]]_{1/k_1}$ i $a_{j,\alpha}(t,z) \in \mathcal{O}\left(D_R\right)[[t]]_{1/k_1}$ dla wszystkich $(j,\alpha) \in \Lambda$ oraz $\varphi_j \in \mathcal{O}\left(D_R\right)$ dla $0 \leq j < M$. Wówczas rozwiązanie formalne $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^\infty u_n(z)t^n$ tego zagadnienia jest rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$.*

UWAGA 5.4 Zauważmy, że Twierdzenie 5.1 nie jest bezpośrednim uogólnieniem Twierdzenia 4.1 ze względu na nieco silniejsze założenia dotyczące ciągów momentów $m_1, \ldots, m_N$, co do których zakładamy teraz, że są regularne i ich rzędy są nie mniejsze niż 1.

Do udowodnienia Twierdzenia 5.1 posłuży następujący fakt:

STWIERDZENIE 5.3 *Zdefiniujmy wielowskaźnik $\alpha_0 = (\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \ldots, \alpha_{0,N})$ w taki sposób, aby*

$$\alpha_{0,k} := \left\lfloor \max_{(j,\alpha)\in\Lambda} \frac{\alpha_k}{\operatorname{ord}_t\left(a_{j,\alpha}\right) - j + M} \right\rfloor + 1 \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, N.$$

Załóżmy ponadto, że $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^\infty u_n(z)t^n$ jest rozwiązaniem formalnym zagadnienia (5.4). Wówczas dla każdego $0 < r < R$ istnieją stałe dodatnie A, B, dla których prawdziwa jest zależność

$$\|u_n(z)\|_{n\alpha_0,r,s} \leq AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.6}$$

Dowód: [2] Bez straty ogólności można przyjąć $u_0(z) \equiv 0$. W przeciwnym przypadku wystarczy wykonać podstawienie $v(t,z) := u(t,z) - \varphi_0(z)$.

Wykażemy prawdziwość (5.6) za pomocą indukcji względem n. Dla $n \leq M-1$ fakt ten wynika z własności funkcji $\varphi_1(z), \dots, \varphi_{M-1}(z)$ i z Lematu 5.4. Weźmy zatem dowolne $n \geq M$ i załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $0,\ 1,\ \dots,\ n-1$.

Możemy zapisać, że $t^M f(t,z) = \sum_{n=M}^{\infty} f_n(z) t^n$ oraz $t^{M-j} a_{j,\alpha}(t,z) = \sum_{n=q_{j,\alpha}}^{\infty} a_{j,\alpha,n}(z) t^n$, gdzie $q_{j,\alpha} = \operatorname{ord}_t(a_{j,\alpha}(t,z)) - j + M$ dla każdego $(j,\alpha) \in \Lambda$. Po podstawieniu do (5.4) powyższych wzorów oraz zastąpieniu $u(t,z)$ przez $\hat{u}(t,z)$ otrzymujemy następującą zależność opisującą $u_n(z)$:

$$u_n(z) = \frac{m_0(n-M)}{m_0(n)} \left[f_n(z) - \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} a_{j,\alpha,p}(z) \frac{m_0(n-p)}{m_0(n-p-j)} \partial_{m,z}^{\alpha} u_{n-p}(z) \right]. \tag{5.7}$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy przy tym zakładać, że $\frac{m_0(n-p)}{m_0(n-p-j)} = 0$ dla $n-p-j < 0$.

Ustalmy dowolne $0 < r < R$. Ponieważ $s = (s_1, \dots, s_N) \in [1,\infty)^N$, możemy rozważać normę Nagumo wyrażenia (5.7). Dokładniej, przyłożymy normę $\|\cdot\|_{n\alpha_0,r,s}$ do obu stron wyżej wspomnianej równości. Zauważmy również, że f jest rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$, a zatem z Lematu 5.4 wynika istnienie dodatnich stałych F, G, dla których $\|f_n(z)\|_{n\alpha_0,r,s} \leq FG^n n!^{\frac{1}{k_1}}$. Z założenia, że $m_0,\ m_1,\ \dots, m_N$ są regularnymi ciągami momentów otrzymujemy, że istnieją stałe $c, C > 0$ takie, że

$$c(n+1)^{s_j} \leq \frac{m_j(n+1)}{m_j(n)} \leq C(n+1)^{s_j} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz } j = 0,1,\dots,N.$$

Korzystając z wyżej wspomnianych zależności, uzyskujemy nierówność

$$\|u_n(z)\|_{n\alpha_0,r,s} \leq \frac{c^{-M}(n-M)!^{s_0}}{n!^{s_0}} \cdot \left[FG^n n!^{\frac{1}{k_1}} + \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} C^j \frac{(n-p)!^{s_0}}{(n-p-j)!^{s_0}} \|a_{j,\alpha,p}(z) \partial_{m,z}^{\alpha} u_{n-p}(z)\|_{n\alpha_0,r,s} \right].$$

Jeśli przyjmiemy, że $A \geq 2c^{-M}F$ i $B \geq G$, uzyskamy ograniczenie

$$\frac{c^{-M}(n-M)!^{s_0}}{n!^{s_0}} FG^n n!^{\frac{1}{k_1}} \leq \frac{1}{2} AB^n n!^{\frac{1}{k_1}}.$$

[2] Dowód został przytoczony za [22]. Porównaj również [25] dla standardowych równań cząstkowych oraz [13] dla równań moment-różniczkowych o współczynnikach zależących wyłącznie od zmiennej t.

Pozostaje pokazać, że również $I \leq \frac{1}{2}AB^n n!^{\frac{1}{k_1}}$ dla

$$I = \frac{c^{-M}(n-M)!^{s_0}}{n!^{s_0}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} C^j \frac{(n-p)!^{s_0}}{(n-p-j)!^{s_0}} \|a_{j,\alpha,p}(z)\partial_{m,z}^{\alpha} u_{n-p}(z)\|_{n\alpha_0,r,s},$$

Z Lematu 5.1 otrzymujemy oszacowanie

$$\|a_{j,\alpha,p}(z)\partial_{m,z}^{\alpha} u_{n-p}(z)\|_{n\alpha_0,r,s} \leq \|a_{j,\alpha,p}(z)\|_{p\alpha_0-\alpha,r,s}\|\partial_{m,z}^{\alpha} u_{n-p}(z)\|_{(n-p)\alpha_0+\alpha,r,s}.$$

Następnie, korzystając z Lematu 5.3 i definicji wielowskaźnika α_0, uzyskujemy

$$\|a_{j,\alpha,p}(z)\|_{p\alpha_0-\alpha,r,s} \leq R^{q_{j,\alpha}|\alpha_0|-|\alpha|}\|a_{j,\alpha,p}(z)\|_{(p-q_{j,\alpha})\alpha_0,r,s}.$$

Ponieważ $q_{j,\alpha} \geq 1$ dla wszystkich $(j,\alpha) \in \Lambda$ i $t^{M-j}a_{j,\alpha}(t,z) = t^{q_{j,\alpha}} \sum_{n=q_{j,\alpha}}^{\infty} a_{j,\alpha,n}(z)t^{n-q_{j,\alpha}}$, można traktować dowolny $a_{j,\alpha,n}(z)$ jako $(n-q_{j,\alpha})$-ty wyraz szeregu formalnego. Z Lematu 5.4 wynika zatem, że

$$\|a_{j,\alpha,p}(z)\|_{(p-q_{j,\alpha})\alpha_0,r,s} \leq \tilde{K}L^p\,(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}$$

dla pewnych dodatnich stałych $\tilde{K}, L$. Dla $K = R^{q_{j,\alpha}|\alpha_0|}\tilde{K}$ uzyskujemy zatem

$$\|a_{j,\alpha,p}(z)\|_{p\alpha_0-\alpha,r,s} \leq KL^p\,(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}.$$

Ponadto Lemat 5.2 implikuje, że

$$\begin{aligned}\|\partial_{m,z}^{\alpha} u_{n-p}(z)\|_{(n-p)\alpha_0+\alpha,r,s} &\leq C^{|\alpha|}\,|\alpha_0|^{s\cdot\alpha}\,\|u_{n-p}(z)\|_{(n-p)\alpha_0,r,s}\cdot \\ &\cdot \prod_{k=1}^{N}\left(n-p+\frac{\alpha_k-1}{\alpha_{0,k}}\right)^{s_k}\left(n-p+\frac{\alpha_k-2}{\alpha_{0,k}}\right)^{s_k}\ldots(n-p)^{s_k}.\end{aligned}$$

Z założenia indukcyjnego mamy

$$\|u_{n-p}(z)\|_{(n-p)\alpha_0,r,s} \leq AB^{n-p}(n-p)!^{\frac{1}{k_1}}.$$

Ponadto zauważmy, że

$$(p-q_{j,\alpha})!^{\frac{1}{k_1}}(n-p)!^{\frac{1}{k_1}} \leq \frac{n!^{\frac{1}{k_1}}}{(n-p+1)^{\frac{1}{k_1}}\ldots(n-p+q_{j,\alpha})^{\frac{1}{k_1}}} \leq \frac{n!^{\frac{1}{k_1}}}{(n-p+1)^{q_{j,\alpha}/k_1}}$$

oraz

$$n - p + \frac{l}{\alpha_{0,k}} \leq n - p + \frac{q_{j,\alpha} l}{\alpha_k} \text{ dla każdego } 0 \leq l \leq \alpha_k - 1,\ 1 \leq k \leq N.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
I \leq AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \sum_{(j,\alpha)\in\lambda} c^{-M} K C^{j+|\alpha|} \left|\alpha_0\right|^{s\cdot\alpha} \frac{(n-M)!^{s_0}(n-p)!^{s_0}}{n!^{s_0}(n-p-j)!^{s_0}(n-p+1)^{q_{j,\alpha}/k_1}} \cdot \\
\cdot \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=0}^{\alpha_k - 1} \left(n - p + \left\lceil \frac{q_{j,\alpha} l}{\alpha_k} \right\rceil\right)^{s_k} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \left(\frac{L}{B}\right)^p \leq \\
\leq AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \sum_{(j,\alpha)\in\lambda} c^{-M} K C^{j+|\alpha|} \left|\alpha_0\right|^{s\cdot\alpha} \frac{(n-p)^{s_0 j}\left(n-p+q_{j,\alpha}\right)^{s\cdot\alpha}}{(n-M+1)^{s_0 M}(n-p+1)^{s_0(j-M)+s\cdot\alpha}} \cdot \\
\cdot \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \left(\frac{L}{B}\right)^p \leq \\
\leq AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \sum_{(j,\alpha)\in\lambda} c^{-M} K C^{j+|\alpha|} \left|\alpha_0\right|^{s\cdot\alpha} \left(\frac{n-p+q_{j,\alpha}}{n-p+1}\right)^{s\cdot\alpha} \left(\frac{n-p+1}{n-M+1}\right)^{s_0 M} \cdot \\
\cdot \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \left(\frac{L}{B}\right)^p .
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\frac{n-p+q_{j,\alpha}}{n-p+1} \leq 1 + \frac{q_{j,\alpha}-1}{n-p+1} \leq q_{j,\alpha} \text{ dla każdego } 1 \leq p \leq n$$

oraz

$$\frac{n-p+1}{n-M+1} \leq \frac{1}{1-\frac{M-1}{n}} \leq M \text{ dla każdego } n \geq M,$$

Po połączeniu wszystkich przytoczonych wyżej zależności otrzymujemy

$$\begin{aligned}
I \leq AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} c^{-M} K C^{j+|\alpha|} \left|\alpha_0\right|^{s\cdot\alpha} M^{Ms_0} q_{j,\alpha}^{s\cdot\alpha} \sum_{p=q_{j,\alpha}}^{n} \left(\frac{L}{B}\right)^p \leq \\
\leq AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} c^{-M} K C^{j+|\alpha|} \left|\alpha_0\right|^{s\cdot\alpha} M^{Ms_0} q_{j,\alpha}^{s\cdot\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{L}{B}\right)^p = \\
= AB^n n!^{\frac{1}{k_1}} \sum_{(j,\alpha)\in\Lambda} c^{-M} K C^{j+|\alpha|} \left|\alpha_0\right|^{s\cdot\alpha} M^{Ms_0} q_{j,\alpha}^{s\cdot\alpha} \frac{L}{B-L}.
\end{aligned}$$

Pozostaje jedynie zauważyć, że ostatnia suma może być ograniczona z góry przez $\frac{1}{2}$ dla dostatecznie dużych $B > L$. ■

Korzystając ze Stwierdzenia 5.3, przeprowadzimy dowód Twierdzenia. 5.1.

Dowód Twierdzenia 5.1: Korzystając ze Stwierdzenia 5.3 oraz Lematu 5.5 wnioskujemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $\rho < r$ istnieją stałe dodatnie $\tilde{A}$, A, i B takie, że

$$\sup_{z \in D_\rho} |u_n(z)| \leq \tilde{A}^{n|\alpha_0|} \|u_n(z)\|_{n\alpha_0,r,s} \leq A \left(\tilde{A}^{|\alpha_0|} B\right)^n n!^{\frac{1}{k_1}}.$$

Stąd $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D_R)[[t]]_{1/k_1}$. ■

Zauważmy jeszcze, że założenie mówiące, że wszystkie współczynniki operatora P są rzędu Gevreya $\frac{1}{k_1}$ w istocie oznacza, że muszą one być co najwyżej tego rzędu. Poniższy prosty przykład ilustruje niezbędność tego założenia.

PRZYKŁAD 5.1 Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} \left(\partial_t - a(t)\partial_z^2\right) u(t,z) = 0 \\ \qquad\qquad u(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D_R), \end{cases} \tag{5.8}$$

gdzie $a(t) \in \mathbb{C}[[t]]_s$ dla pewnego $s \geq 0$. Oczywiście mamy $\frac{1}{k_1} = 1$ i jeśli $s \leq 1$, to z Twierdzenia 5.1 wynika, że rozwiązanie formalne $\hat{u}(t,z)$ zagadnienia (5.8) także jest rzędu Gevreya 1.

Nie musi tak być dla $s > 1$. Weźmy

$$\varphi(z) = \frac{z^2}{2} \text{ i } a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1)!^s t^n.$$

Wówczas $a(t)$ jest rzędu Gevreya s. Otrzymujemy ponadto następującą zależność dla wyrazów szeregu $\hat{u}(t,z)$:

$$\begin{cases} u_0(z) = \dfrac{z^2}{2} \\ u_{n+1}(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(p+1)(p+1)!^s}{n+1} \partial_z^2 u_{n-p}(z) \text{ dla } n \geq 0 \end{cases}.$$

W tym wypadku u_n nie zależą od zmiennej z dla $n \geq 1$ i wobec tego

$$u_{n+1}(z) = \frac{(n+1)(p+1)!^s}{n+1} \partial_z^2 u_0(z) = (n+1)!^s \text{ dla } n \geq 0.$$

Stąd $\hat{u}(t,z) = \frac{z^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n!^s t^n$ i nie jest szeregiem rzędu Gevreya 1 dla $s > 1$, a więc teza Twierdzenia 5.1 nie jest w tym wypadku prawdziwa.

ROZDZIAŁ 6

Problem sumowalności dla równań o współczynnikach niezależnych od zmiennej czasowej

Niniejszy rozdział poświęcony jest problemowi k-sumowalności rozwiązań formalnych równań liniowych o zmiennych współczynnikach. Na początek rozważymy przypadek uogólnionego równania przewodnictwa cieplnego. Ze względu na swoją nieskomplikowaną strukturę pozwoli on klarownie zaprezentować metodę wykorzystywaną do uzyskania wyników. Następnie przejdziemy do bardziej ogólnego równania podobnego do omawianych w poprzednich rozdziałach. Bazą tych rozważań będą nieco bardziej ogólne wyniki zaprezentowane odpowiednio w [7] i [8]. Analogiczne rezultaty dla klasycznych równań cząstkowych można znaleźć w [2] i [19].

W dalszej części rozdziału ograniczymy się wyłącznie do $z \in \mathbb{C}$.

Rozważania dotyczące k-sumowalności rozpoczniemy od zdefiniowania odpowiedniej normy na przestrzeni funkcji holomorficznych.

DEFINICJA 6.1 Niech $0 < \tilde{r} < r$. Przez $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ będziemy oznaczać przestrzeń funkcji holomorficznych na dysku $\bar{D} = \bar{D}_r \subset \mathbb{C}$ z normą zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \right\|_{\tilde{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\,|z|^n, \quad z \in \bar{D},\ |z| = \tilde{r}.$$

LEMAT 6.1 *Niech $f,\ g \in \mathbb{E}$ i niech $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$. Wówczas*

$$\|f(z)g(z)\|_{\tilde{r}} \leq \|f(z)\|_{\tilde{r}}\|g(z)\|_{\tilde{r}} \text{ *dla* } z \in \bar{D},\ |z| = \tilde{r} < r.$$

Dowód: Przy ustalonym $\tilde{r} < r$ wystarczy zauważyć, że

$$\|f(z)g(z)\|_{\tilde{r}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |f_k g_{n-k}||z|^n = \|f(z)\|_{\tilde{r}}\|g(z)\|_{\tilde{r}}$$

■

Powiemy, że ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ jest *logarytmicznie wypukły*, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$a_n^2 \leq a_n a_{n+1}.$$

LEMAT 6.2 *Niech m będzie funkcją momentów taką, że ciąg momentów $(m(n))_{n\geq 0}$ jest logarytmicznie wypukły, i niech $f \in \mathcal{O}\left(\bar{D}\right)$. Jeśli istnieją $C < \infty$ i $n \in \mathbb{N}_0$, dla których*

$$\|f(z)\|_{\tilde{r}} \leq C\frac{|z|^n}{m(n)} \text{ dla każdego } z \in \bar{D},\ |z| = \tilde{r}, \tag{6.1}$$

to

$$\|\partial_{m,z}^{-k} f(z)\|_{\tilde{r}} \leq C\frac{|z|^{n+k}}{m(n+k)} \text{ dla każdego } k \in \mathbb{N}_0 \text{ i } z \in \bar{D},\ |z| = \tilde{r}. \tag{6.2}$$

Dowód: Na początek zauważmy, że z (6.1) wynika holomorficzność funkcji f na dysku $\bar{D}$ i możemy zapisać $f(z) = \sum_{j=n}^{\infty} f_j z^j$ dla każdego $z \in \bar{D}$. Zdefiniujmy następującą pomocniczą funkcję:

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} |f_{j+n}| m(n) z^j.$$

Wówczas wnioskujemy na podstawie (6.1), że

$$\|g(z)\|_{\tilde{r}} = \frac{m(n)}{|z|^n}\|f(z)\|_{\tilde{r}} \leq C.$$

Ponadto mamy $f(z) \ll \frac{|z|^n}{m(n)} g(z)$. W wyniku działania na f operatorem $\partial_{m,z}^{-k}$ otrzymujemy

$$\partial_{m,z}^{-k} f(z) = \sum_{j=n+k}^{\infty} \frac{m(j-k)}{m(j)} f_{j-k} z^j = \frac{z^{n+k}}{m(n+k)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{m(j+n)m(n+k)}{m(j+n+k)} f_{j+n} z^j.$$

Z logarytmicznej wypukłości ciągu $m(n)$ wynika nierówność

$$\frac{m(j+n)m(n+k)}{m(j+n+k)} \leq m(n).$$

Korzystając z powyższego oraz z zależności między f i g, wnioskujemy, że

$$\partial_{m,z}^{-k} f(z) \ll \frac{z^{n+k}}{m(n+k)} \sum_{j=0}^{\infty} m(n)|f_{j+n}| z^j = \frac{z^{n+k}}{m(n+k)} g(z).$$

Stąd

$$\|\partial_{m,z}^{-k} f(z)\|_{\tilde{r}} \leq \frac{|z|^{n+k}}{m(n+k)}\|g(z)\|_{\tilde{r}} \leq \frac{|z|^{n+k}}{m(n+k)} C,$$

co kończy dowód. ■

LEMAT 6.3 *Załóżmy, że* $f(z) = f_1(z) + \cdots + f_p(z)$*, gdzie* $f_j \in \mathcal{O}(\bar{D})$ *dla* $j = 1, \ldots, p$ *oraz*

$$\|f_j(z)\|_{\tilde{r}} \leq C_j \frac{|z|^{n_j}}{m(n_j)} \text{ dla każdego } z \in \bar{D},\ |z| = \tilde{r},\ j = 1, \ldots, p.$$

Wówczas przy założeniach z Lematu 6.2 dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ *otrzymujemy*

$$\|\partial_{m,z}^{-k} f(z)\|_{\tilde{r}} \leq \sum_{j=1}^{p} C_j \frac{|z|^{n_j+k}}{m(n_j+k)} \text{ dla każdego } z \in \bar{D},\ |z| = \tilde{r}.$$

Dowód: Korzystając z poprzedniego lematu, wnioskujemy, że

$$\|\partial_{m,z}^{-k} f(z)\|_{\tilde{r}} \leq \sum_{j=1}^{p} \|\partial_{m,z}^{-k} f_j(z)\|_{\tilde{r}} \leq \sum_{j=1}^{p} C_j \frac{|z|^{n_j+k}}{m(n_j+k)}.$$

■

6.1 Uogólnione równanie przewodnictwa cieplnego

Problem sumowalności zostanie omówiony najpierw dla pewnej prostej klasy równań moment-różniczkowych, to jest dla uogólnionego równania przewodnictwa cieplnego. Wszystkie wyniki zaprezentowane w tym podrozdziale są w istocie szczególnymi przypadkami tych opublikowanych w [7].

Rozważmy funkcje jądrowe $e_1(z)$ i $e_2(z)$ oraz związane z nimi funkcje momentów $m_1,\ m_2$ dodatnich rzędów odpowiednio $s_1,\ s_2$. Dodatkowo niech $p, \kappa \in \mathbb{N}$ będą liczbami spełniającymi warunek $s_2 p > s_1 \kappa$. Ustalmy $r > 0$ i niech $D := D_r$. Weźmy taką funkcję $a(z) \in \mathcal{O}(\bar{D})$, dla której także $\frac{1}{a(z)} \in \mathcal{O}(\bar{D})$, $\hat{f}(t,z) \in \mathbb{C}[[t,z]]$ oraz $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}(\bar{D})$ dla $0 \leq j \leq \kappa - 1$.

Przy powyższych założeniach możemy rozważać zagadnienie Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} \left(\partial_{m_1,t}^{\kappa} - a(z)\partial_{m_2,z}^{p}\right) u(t,z) = \hat{f}(t,z) \\ \qquad\qquad \partial_{m_1,t}^{j} u(0,z) = \varphi_j(z) \quad \text{dla} \quad 0 \leq j \leq \kappa - 1 \end{cases} \tag{6.3}$$

Wówczas prawdziwy jest następujący fakt:

STWIERDZENIE 6.1 *Przy wszystkich powyższych założeniach zagadnienie* (6.3) *ma jednoznaczne rozwiązanie formalne* $\hat{u}(t,z) \in \mathbb{C}[[t,z]]$.

Dowód: Niech $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} t^n z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_{n,\star}(z) t^n$. Na podstawie założenia o $\hat{f}$ możemy także przyjąć, że $\hat{f}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{n,k} t^n z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_{n,\star}(z) t^n$. Z warunków początkowych uzyskujemy $u_{j,\star}(z) = \frac{\varphi_j(z)}{m_1(j)}$ dla $0 \le j \le \kappa - 1$. Ponadto po podstawieniu $\hat{u}$ do równania (6.3) otrzymujemy następującą zależność na kolejne wyrazy szeregu $\hat{u}(t,z)$

$$m(n+\kappa)u_{n+\kappa,\star}(z) = a(z)\partial^p_{m_2,z}u_{n,\star}(z) + f_{n,\star}(z) \text{ dla } n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.4}$$

Z tej zależności wynika jednoznaczność $\hat{u}(t,z)$. ■

Bezpośrednio z definicji $\varphi_j(z)$ dla $0 \le j \le \kappa - 1$ oraz (6.4) wynika następujący wniosek:

WNIOSEK 6.1 *Jeśli $\hat{f}(t,z) \in \mathcal{O}(\bar{D})[[t]]$, to również $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(\bar{D})[[t]]$.*

Załóżmy dodatkowo, że ciąg momentów $(m_2(n))_{n\ge 0}$ jest logarytmicznie wypukły. Korzystając z Lematu 6.2 oraz Stwierdzenia 3.6, możemy wówczas określić warunek konieczny i dostateczny sumowalności rozwiązania formalnego $\hat{u}(t,z)$.

TWIERDZENIE 6.1 *Przy wszystkich wcześniejszych założeniach niech $\hat{u}(t,z)$ będzie rozwiązaniem formalnym zagadnienia Cauchy'ego* (6.3). *Niech $k = \frac{s_2 p}{\kappa} - s_1$ i niech $d \in \mathbb{R}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\hat{u}(t,z)$ *jako szereg formalny z* $\mathbb{E}[[t]]$ *jest k-sumowalny w kierunku d.*

(ii) $\hat{f}(t,z) \in \mathbb{E}[[t]]$ *i* $\partial^q_{m_2,z}\hat{u}(t,0) \in \mathbb{C}[[t]]$ *dla* $0 \le q \le p-1$ *są k-sumowalne w kierunku d.*

Dowód: (i)⇒(ii): Implikacja wynika z Twierdzenia 3.3 oraz z nierówności (2.17), na podstawie której wnioskujemy, że zbiór $\mathbb{E}\{t\}_{k,d}$ jest zamknięty ze względu na działanie operatora $\partial_{m_2,z}$. Stąd i z (6.4) wynika, że jeśli $\hat{u}$ jest k-sumowalny, to k-sumowalne są też $\hat{f}$ oraz $\partial^q_{m_2,z}\hat{u}(t,z)$ dla każdego $0 \le q \le p-1$ i $z \in D$.

(ii)⇒(i): Zauważmy, że z Wniosku 6.1 mamy $\hat{u}(t,z) \in \mathbb{E}[[z]]$. Wprowadźmy oznaczenie $\hat{\psi}_0(t) = \hat{u}(t,0)$ i dla $1 \le q \le p-1$ połóżmy $\hat{\psi}_q(t) = \frac{\partial^q_{m_2,z}\hat{u}(t,0)}{m_2(q)}$. Następnie dokonamy podstawienia $\hat{w}(t,z) = \partial^p_{m_2,z}\hat{u}(t,z)$. Wówczas możemy zaobserwować, że

$$\hat{u}(t,z) = \hat{\psi}_0(t) + \hat{\psi}_1(t)z + \ldots + \hat{\psi}_{p-1}(t)z^{p-1} + \partial^{-p}_{m_2,z}\hat{w}(t,z).$$

Wobec tego $\hat{w}(t,z)$ spełnia równanie

$$\left(1 - \frac{1}{a(z)}\partial^\kappa_{m_1,t}\partial^{-p}_{m_2,z}\right)\hat{w}(t,z) = \hat{g}(t,z), \tag{6.5}$$

gdzie $\hat{g}(t,z) = \frac{1}{a(z)}\left(\partial^\kappa_{m_1,t}\hat{\psi}_0(t) + \partial^\kappa_{m_1,t}\hat{\psi}_1(t)z + \ldots + \partial^\kappa_{m_1,t}\hat{\psi}_{p-1}(t)z^{p-1} - \hat{f}(t,z)\right)$. Z założeń (ii) oraz Twierdzenia 3.3 wynika, że $\hat{g}(t,z) \in \mathbb{E}[[t]]$ jest k-sumowalny w kierunku d.

Możemy zapisać $\hat{w}(t,z)$ jako $\hat{w}(t,z) = \sum_{q=0}^\infty \hat{w}_q(t,z)$, gdzie kolejne $\hat{w}_q(t,z)$ zadane są za pomocą zależności rekurencyjnej:

$$\begin{cases} \hat{w}_0(t,z) = \hat{g}(t,z) \\ \hat{w}_q(t,z) = \dfrac{1}{a(z)} \partial^{\kappa}_{m_1,t} \partial^{-p}_{m_2,z} \hat{w}_{q-1}(t,z) \quad \text{dla } q \geq 1. \end{cases} \tag{6.6}$$

Rozważmy obszar sektorowy $G = G_d(\alpha)$, gdzie kąt rozwarcia $\alpha > \frac{\pi}{k}$. Niech $w_0(t,z) \in \mathcal{O}(G \times \bar{D})$ oznacza k-sumę szeregu $\hat{w}_0(t,z)$. Zgodnie ze Stwierdzeniem 3.6 dla dowolnego sektora $\bar{S} \subset G$ istnieją stałe $C,\ K > 0$, dla których

$$\|\partial^n_{m_1,t} w_0(t,z)\|_r \leq CK^n m_1(n) \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right) \text{ dla wszystkich } t \in \bar{S},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Zauważmy następnie, że przeprowadzając rozumowanie podobne do tego użytego w dowodach Lematów 6.2 i 6.3 możemy wywnioskować, że zbiór $\mathbb{E}\{t\}_{k,d}$ jest zamknięty ze względu na działanie operatora $\partial^{-1}_{m_2,z}$. Stąd oraz z (6.6), Twierdzenia 3.3 i Stwierdzenia 3.5 wynika, że $\hat{w}_q(t,z)$ są k-sumowalne w kierunku d dla wszystkich $q \geq 0$. Ponadto ich k-sumy $w_q(t,z)$ spełniają tę samą zależność rekurencyjną. Niech $B = \left\|\frac{1}{a(z)}\right\|_r$. Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnego $q \geq 0$ mamy

$$\|\partial^n_{m_1,t} w_q(t,z)\|_{\tilde{r}} \leq CB^q K^{n+\kappa q} m_1(n+\kappa q) \Gamma\left(1 + \frac{n+\kappa q}{k}\right) \frac{|z|^{pq}}{m_2(pq)}. \tag{6.7}$$

dla wszystkich $t \in \bar{S} \subset G$, $z \in \bar{D}$ przy $|z| = \tilde{r}$.

Własność jest oczywiście prawdziwa dla $q = 0$. Załóżmy zatem, że (6.7) jest prawdą dla pewnego $q \geq 0$. Wówczas, korzystając z (6.6) dla $w_q(t,z)$ i Lematu 6.2, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\partial^n_{m_1,t} w_{q+1}(t,z)\|_{\tilde{r}} &= \left\| \frac{1}{a(z)} \partial^{n+\kappa}_{m_1,t} \partial^{-p}_{m_2,z} w_q(t,z) \right\|_{\tilde{r}} \leq \\ &\leq BCK^{n+\kappa+\kappa q} B^q m_1(n+\kappa+\kappa q) \Gamma\left(1 + \frac{n+\kappa+\kappa q}{k}\right) \frac{|z|^{p+pk}}{m_2(p+pq)} = \\ &= CK^{n+\kappa+\kappa q} B^{q+1} m_1(n+\kappa+\kappa q) \Gamma\left(1 + \frac{n+\kappa+\kappa q}{k}\right) \frac{|z|^{p+pk}}{m_2(p+pq)}. \end{aligned}$$

Wobec tego mamy

$$\sum_{q=0}^{\infty} \|\partial^n_{m_1,t} w_q(t,z)\|_{\tilde{r}} \leq CK^n m_1(n) \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right) \sum_{q=0}^{\infty} K^{\kappa q} B^q \frac{m_1(n+\kappa q) \Gamma\left(1 + \frac{n+\kappa q}{k}\right)}{m_1(n) \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right)} \frac{|z|^{pq}}{m_2(pq)}.$$

Aby oszacować wyrażenie

$$\frac{m_1(n+\kappa q) \Gamma\left(1 + \frac{n+\kappa q}{k}\right)}{m_1(n) \Gamma\left(1 + \frac{n}{k}\right) m_2(pq)},$$

zauważmy, że

$$\frac{m_1(n+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa p}{k}\right)}{m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)m_2(p_\kappa p)} \sim \frac{(n+\kappa p)!^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}}{n!^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}(\kappa p)!^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}} \leq \binom{n+\kappa p}{n}^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}.$$

Istnieje zatem stała $\tilde{A} > 0$ taka, że

$$\frac{m_1(n+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa p}{k}\right)}{m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)m_2(p_\kappa p)} \leq \tilde{A}^{n+\kappa p}. \tag{6.8}$$

Wobec tego

$$\|\partial^n_{m_1,t} w(t,z)\|_{\mathbb{E}} \leq \sum_{q=0}^{\infty} \|\partial^n_{m_1,t} w_q(t,z)\|_{\tilde{r}} \leq$$
$$\leq C(\tilde{A}K)^n m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\sum_{q=0}^{\infty} K^{\kappa q} B^q \tilde{A}^{\kappa q}|z|^{pq}. \tag{6.9}$$

Ostatnia suma w (6.9) będzie skończona dla $|z| < (\tilde{A}^\kappa B K^\kappa)^{-p}$. Wobec tego $w(t,z)$ jest funkcją holomorficzną na $G \times D_{r'}$, gdzie $r' = \min\{r, (\tilde{A}^\kappa B K^\kappa)^{-p}\}$, oraz

$$\|\partial^n_{m_1,t} w(t,z)\|_{\mathbb{E}} \leq \tilde{C}\tilde{K}^n m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right) \tag{6.10}$$

dla pewnych stałych dodatnich $\tilde{C},\ \tilde{K}$.

Pozostaje udowodnić, że $w(t,z)$ jest k-sumą szeregu $\hat{w}(t,z) = \sum_{q=0}^{\infty}\hat{w}_q(t,z)$ w kierunku d. W tym celu ustalmy funkcję jądrową $\tilde{e}$ rzędu k i niech $\tilde{m}$ oznacza związaną z nią funkcję momentów. Wówczas dla dowolnego $q \in \mathbb{N}_0$ z definicji k-sumowalności i nierówności (6.10) mamy:

$$w_q(t,z) = \mathcal{L}_{\tilde{e},d}\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},t}\hat{w}_q(t,z) \text{ oraz } w(t,z) = \sum_{q=0}^{\infty}\mathcal{L}_{\tilde{e},d}\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},t}\hat{w}_q(t,z)$$

Zauważmy ponadto, że oszacowanie (6.10) gwarantuje nam, że $\mathcal{B}_{\tilde{m},t}w(t,z)$ będzie holomorficzna na $U \times D$, gdzie U jest pewnym otoczeniem punktu $t=0$, a ponadto na pewnym sektorze S_d będzie ona miała wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k.

Ponieważ szereg jest zbieżny, mamy

$$\mathcal{B}_{\tilde{e},d}w(t,z) = \mathcal{B}_{\tilde{e},d}\sum_{q=0}^{\infty}\mathcal{L}_{\tilde{e},d}\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},t}\hat{w}_q(t,z) = \sum_{q=0}^{\infty}\hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},t}\hat{w}_q(t,z) = \hat{\mathcal{B}}_{\tilde{m},t}\hat{w}(t,z).$$

■

WNIOSEK 6.2 *Jeśli którykolwiek z równoważnych warunków z Twierdzenia 6.1 jest spełniony, suma szeregu $\hat{u}(t,z)$ jest rozwiązaniem analitycznym* (6.3), *o ile tylko zastąpimy szereg formalny $\hat{f}$ jego k-sumą w kierunku d.*

Dowód: Załóżmy, że spełniony jest którykolwiek z warunków z Twierdzenia 6.1. Niech wówczas $f(t,z)$ oznacza k-sumę szeregu $\hat{f}(t,z)$ w kierunku d, a $u(t,z)$ – k-sumę $\hat{u}(t,z)$ w kierunku d. Wtedy funkcja $t \mapsto \left(\partial_{m_1,t} - a(z)\partial^p_{m_2,z}\right) - f(t,z)$ ma zerowe rozwinięcie asymptotyczne w pewnym sektorze $S_d(\alpha)$, gdzie $\alpha > \frac{\pi}{k}$. Z Lematu Watsona (Twierdzenie 3.1) wynika, że funkcja ta musi być stała równa 0. Zatem $u(t,z)$ jest rozwiązaniem równania (6.3). ■

6.2 Ogólne równanie liniowe o zmiennych współczynnikach

Bazując na metodzie zastosowanej w poprzednim podrozdziale, poddamy analizie bardziej ogólne równanie[1] postaci

$$\left(1 - \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q=0}^{p_i} a_{iq}(z)\partial^{-i}_{m_1,t}\partial^q_{m_2,z}\right)u(t,z) = \hat{f}(t,z), \tag{6.11}$$

gdzie $\mathcal{K} \subset \{1,\ldots,\kappa\} \subset \mathbb{N}$ dla pewnego naturalnego $\kappa \geq 1$, $p_i \geq 0$ dla każdego $i \in \mathcal{K}$ oraz $m_1,\ m_2$ są regularnymi funkcjami momentów dodatnich rzędów odpowiednio $s_1,\ s_2$ i ciąg $(m_2(n))_{n\geq 0}$ jest logarytmicznie wypukły. Dodatkowo niech wszystkie $a_{iq}(z)$ oraz $\frac{1}{a_{\kappa p_\kappa}(z)}$ będą holomorficzne dla $z \in D_r$ przy $r < 1$.

Ponadto zakładamy, że diagram Newtona dla operatora

$$P(\partial_{m_1,t},\partial_{m_2,z}) = 1 - \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q=0}^{p_i} a_{iq}(z)\partial^{-i}_{m_1,t}\partial^q_{m_2,z}$$

zawiera dokładnie jeden niepoziomy odcinek, którego nachylenie k dane jest za pomocą wzoru

$$\frac{1}{k} = \frac{s_2p_\kappa - s_1\kappa}{\kappa} = \frac{s_2p_\kappa}{\kappa} - s_1. \tag{6.12}$$

UWAGA 6.1 Istnieje co najmniej jedno $i \in \mathcal{K}$, dla którego spełniona jest nierówność $\frac{p_i}{i} \geq \frac{s_1}{s_2}$. Istotnie, gdyby nie była to prawda, otrzymalibyśmy w szczególności $s_2p_\kappa - s_1\kappa < 0$, co przeczy wcześniejszemu założeniu dotyczącemu struktury diagramu Newtona.

UWAGA 6.2 Dla każdego $i \in \mathcal{K}$ zachodzi

$$\frac{p_i}{i} \leq \frac{p_\kappa}{\kappa}. \tag{6.13}$$

[1] Wyniki zebrane w tym podrozdziale są szczególnym przypadkiem tych z [8].

Dowód: Ustalmy $i \in \mathcal{K}$. Wówczas

$$\frac{s_2 p_i - s_1 i}{i} \leq \frac{s_2 p_\kappa - s_1 \kappa}{\kappa}.$$

Stąd wynika, że

$$s_2 \kappa p_i - s_1 \kappa i \leq s_2 i p_\kappa - s_1 \kappa i$$
$$\kappa p_i \leq i p_\kappa$$
$$\frac{p_i}{i} \leq \frac{p_\kappa}{\kappa}$$

■

STWIERDZENIE 6.2 *Równanie* (6.11) *ma jednoznaczne rozwiązanie formalne* $\hat{u}(t,z)$.

Dowód: Niech $\hat{f}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) z^n$ oraz niech $a_{iq}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{iq,n} z^n$ dla dowolnych $i \in \mathcal{K}$, $0 \leq q \leq p_i$. Ponadto niech $f_n(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. Weźmy $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{z^n}{m_2(n)}$ takie, że $u_n(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. Po podstawieniu tak zdefiniowanego $\hat{u}$ oraz $\hat{f}$ i a_{iq} do równania (6.11), otrzymujemy jednoznaczną formułę na wszystkie $u_n(t)$ dla $n \geq \kappa$, o ile tylko znane są $u_0(t),\ u_1(t),\ \ldots,\ u_{\kappa-1}(t)$[2]. ■

Przy wszystkich założeniach przedstawionych na początku tego rozdziału prawdziwe jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 6.2 *Rozważmy równanie* (6.11) *i niech* k *będzie dane za pomocą* (6.12). *Załóżmy ponadto, że* $\hat{f}(t,z) \in \mathbb{E}[[t]]$ *oraz* $\partial_{m_1,t}^{-i} \partial_{m_2,z}^{q} \hat{u}(t,0)$, *gdzie* $i \in \mathcal{K}$ *i* $0 \leq q \leq p_\kappa - 1$, *są* k*-sumowalne w pewnym kierunku* $d \in \mathbb{R}$. *Wówczas rozwiązanie formalne* $\hat{u}(t,z)$ *równania* (6.11) *jest również* k*-sumowalne w kierunku* d.

W świetle Stwierdzenia 3.5 wystarczy założyć, że k-sumowalne są $\partial_{m_2,z}^{q} \hat{u}(t,0)$ dla wszystkich $0 \leq q \leq p_\kappa - 1$. Warto jednak nadmienić, że dla bardziej ogólnych ciągów momentów pochodzących od ciągów silnie regularnych Stwierdzenie 3.5 nie zawsze musi być prawdziwe. Zagadnienie to zostało bardziej szczegółowo omówione w [8] w Rozdziale 5.

Rozważmy $z \in \bar{D}_r$ dla pewnego (małego) $r > 0$. Dla $\hat{v}(t,z) = \partial_{m_2,z}^{p_\kappa} \hat{u}(t,z)$ otrzymujemy następującą zależność

$$\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{p_\kappa - 1} u_n(t) z^n + \partial_{m_2,z}^{-p_\kappa} \hat{v}(t,z).$$

Następnie zapiszmy $\hat{v}$ w postaci $\hat{v}(t,z) = \partial_{m_1,t}^{\kappa} \hat{w}(t,z)$ dla pewnego $\hat{w}(t,z)$. Wówczas (6.11)

[2]Porównaj: [8, Rozdział 4].

przyjmuje postać

$$\left(1 - b_{\kappa p_\kappa}(z)\partial^{\kappa}_{m_1,t}\partial^{-p_\kappa}_{m_2,z} + \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q\in Q_i} b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}\right)\hat{w}(t,z) = \hat{g}(t,z)$$

dla

$$\hat{g}(t,z) = \frac{1}{a_{\kappa p_\kappa}(z)}\left(\sum_{n=0}^{p_\kappa-1} u_n(t)z^n - \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q=0}^{p_i}\sum_{n=0}^{p_\kappa-1} a_{iq}(z)\partial^{-i}_{m_1,t}\partial^{q}_{m_2,z}u_n(t)z^n - \hat{f}(t,z)\right), \quad (6.14)$$

która przy założeniach Twierdzenia 6.2 jest k-sumowalna. Niech $g(t,z)$ oznacza k-sumę $\hat{g}(t,z)$ w kierunku d holomorficzną dla t z pewnego obszaru sektorowego $G = G_d(\alpha)$, $\alpha > \frac{\pi}{k}$, oraz $z \in \bar{D}_r$. Wprowadźmy ponadto następujące oznaczenia:

$$Q_\kappa = \{0,1,\ldots,p_\kappa - 1\} \quad \text{i} \quad Q_i = \{0,1,\ldots,p_i\} \ \text{dla}\ i < \kappa.$$

Zauważmy, że założenia dotyczące współczynników $a_{iq}(z)$ gwarantują holomorficzność wszystkich $b_{iq}(z)$, gdyż są one zadane za pomocą następującej zależności:

$$b_{iq}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{\kappa p_\kappa}(z)} & \text{dla } i = \kappa,\ q = p_\kappa \\ \dfrac{a_{iq}(z)}{a_{\kappa p_\kappa}(z)} & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wprowadźmy zatem oznaczenie $B = \max_{i,q}\max_{\tilde{r}\le r}\|b_{iq}(z)\|_{\tilde{r}}$.

Tak jak przypadku równania przewodnictwa, możemy zapisać $\hat{w}(t,z) = \sum_{p\ge 0}\hat{w}_p(t,z)$, przy czym kolejne współczynniki opisane są za pomocą definicji rekurencyjnej:

$$\begin{cases} \hat{w}_0(t,z) &= \hat{g}(t,z) \\ \hat{w}_{p+1}(t,z) &= \left(b_{\kappa p_\kappa}(z)\partial^{\kappa}_{m_1,t}\partial^{-p_\kappa}_{m_2,z} + \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q\in Q_i} b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}\right)\hat{w}_p(t,z) \ \text{dla}\ p \ge 0. \end{cases}$$

Można analogicznie zdefiniować $w(t,z) = \sum_{p\ge 0} w_p(t,z)$ z kolejnymi $w_p(t,z)$ zadanymi rekurencyjnie przez

$$\begin{cases} w_0(t,z) &= g(t,z) \\ w_{p+1}(t,z) &= \left(b_{\kappa p_\kappa}(z)\partial^{\kappa}_{m_1,t}\partial^{-p_\kappa}_{m_2,z} + \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q\in Q_i} b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}\right)w_p(t,z) \ \text{dla}\ p \ge 0. \end{cases}$$

Ponieważ $w_0(t,z) \in \mathcal{O}(G \times \bar{D}_r)$, obserwujemy, że również $w_p(t,z) \in \mathcal{O}(G \times \bar{D}_r)$ dla $p \geq 1$. Ponadto $\hat{w}_p(t,z)$ jest rozwinięciem asymptotycznym $w_p(t,z)$ względem zmiennej t dla każdego $p \geq 0$. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 6.1 wnioskujemy, że $w_p(t,z)$ jest k-sumą $\hat{w}_p(t,z)$ dla każdego $p \geq 0$.

Zauważmy także, że $w_p(t,z)$ mogą zostać ograniczone z góry przy pomocy Lematu 6.3 dla każdego $p \geq 1$. W istocie $w_1(t,z)$ możemy zapisać jako skończoną sumę funkcji holomorficznych postaci $b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}w_0(t,z)$. Dokładniej z zależności rekurencyjnej mamy:

$$w_1(t,z) = b_{\kappa p_\kappa}(z)\partial^{\kappa}_{m_1,t}\partial^{-p_\kappa}_{m_2,z}w_0(t,z) - \sum_{i\in\mathcal{K}}\sum_{q\in Q_i} b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}w_0(t,z).$$

Korzystając z wcześniejszych rozważań, szacujemy normę dowolnej pochodnej $w_0(t,z)$ względem t następująco:

$$\|\partial^n_{m_1,t}w_0(t,z)\|_{\tilde{r}} \leq CK^n m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\frac{|z|^0}{m_2(0)} \text{ dla } n \in \mathbb{N}_0,\ z \in \overline{D},\ |z| = \tilde{r} \text{ i } t \in G.$$

Stąd i z Lematu 6.2 wnioskujemy następnie, że

$$\left\|b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}w_0(t,z)\right\|_{\tilde{r}} \leq BC'K'^{\kappa-i}m_1(\kappa-i)\Gamma\left(1+\frac{\kappa-i}{k}\right)\frac{|z|^{p_\kappa-q}}{m_2(p_\kappa-q)},$$

dla $|z| = \tilde{r}$ i $t \in G$. Wobec tego

$$\begin{aligned}\|w_1(t,z)\|_{\tilde{r}} &\leq \sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i}\|b_{iq}(z)\partial^{\kappa-i}_{m_1,t}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}w_0(t,z)\|_{\tilde{r}} \leq \\ &\leq \sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i} BC'K'^{\kappa-i}m_1(\kappa-i)\Gamma\left(1+\frac{\kappa-i}{k}\right)\frac{|z|^{p_\kappa-q}}{m_2(p_\kappa-q)}\end{aligned}$$

oraz

$$\|\partial^n_{m_1,t}w_1(t,z)\|_{\tilde{r}} \leq \sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i} BCK^{n+\kappa-i}m_1(n+\kappa-i)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa-i}{k}\right)\frac{|z|^{p_\kappa-q}}{m_2(p_\kappa-q)}.$$

Analogiczne rozumowanie może zostać powtórzone także dla $p \geq 2$.

W dowodzie Twierdzenia 6.2 niezbędne będą także kolejne dwa techniczne lematy[3].

LEMAT 6.4 *Niech $z \in D(0,r)$, gdzie $r < 1$. Wówczas istnieją takie stałe $0 < C, K, B' < \infty$,*

[3] Lematy te są w istocie zmodyfikowanymi wersjami własności udowodnionych w [19].

że nierówność

$$\left\|\partial^n_{m_1,t} w_p(t,z)\right\|_{\tilde r} \le B'^p C K^{n+\kappa p} m_1(n+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa p}{k}\right) P_p(|z|) \tag{6.15}$$

jest prawdziwa dla wszystkich $n\in\mathbb{N}_0,\ \tilde r = |z|$. *Przy tym* $P_p(z)$ *jest wielomianem zadanym za pomocą następującej zależności rekurencyjnej:*

$$\begin{cases} P_0(z) &=& 1\\ P_{p+1}(z) &=& \left[\partial^{-p_\kappa}_{m_2,z} + \sum_{i\in\mathcal{K}'}\sum_{q\in Q_i} p_\kappa^{s_2 p_\kappa}\frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{(p_\kappa p + p_i)!^{s_2}}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}\right] P_p(z) \text{ *dla* } p\ge 0.\end{cases}$$

Dowód: Nierówność (6.15) jest prawdziwa dla $p=0$. Załóżmy zatem, że teza jest spełniona dla pewnego $p\ge 0$. Niech Q_0 oznacza zbiór $\{0\}$. Przy tym dodatkowym oznaczeniu możemy zapisać, że

$$\left\|\partial^n_{m_1,t} w_{p+1}(t,z)\right\|_{\tilde r} \le B'^p C K^{n+\kappa p+\kappa} B\cdot$$
$$\cdot \sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i} K^{-i} m_1(n+\kappa-i+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa-i+\kappa p}{k}\right)\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}(P_p)(|z|).$$

Zauważmy, że $\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)$ jest regularną funkcją momentów rzędu $\frac{1}{k}$, wobec czego dla pewnych stałych $0<a, A<\infty$ mamy

$$a(n+1)^{\frac{1}{k}} \le \frac{\Gamma\left(1+\frac{n+1}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)} \le A(n+1)^{\frac{1}{k}} \text{ dla każdego } n\in\mathbb{N}_0.$$

Korzystając z tego faktu, otrzymujemy

$$m_1(n+\kappa-i+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa-i+\kappa p}{k}\right) \le$$
$$\le \frac{a_1^{-i}a^{-i}}{\prod_{l=1}^{i}(n+\kappa-i+\kappa p+l)^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}} m_1(n+\kappa+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa+\kappa p}{k}\right).$$

Zatem dla $K\ge\frac{1}{aa_1}$, otrzymujemy

$$\left\|\partial^n_{m_1,t} w_{p+1}(t,z)\right\|_{\tilde r} \le B'^p C K^{n+\kappa p+\kappa} B m_1(n+\kappa+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa+\kappa p}{k}\right)\cdot$$
$$\cdot\sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\prod_{l=1}^{i}(n+\kappa-i+\kappa p+l)^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}}\partial^{q-p_\kappa}_{m_2,z}(P_p)(|z|). \tag{6.16}$$

Następnie zauważmy, że

$$\prod_{l=1}^{i}(n+\kappa-i+\kappa p+l)^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}} \geq \prod_{l=1}^{i}(\kappa p+l)^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}} = \left[\frac{(\kappa p+i)!}{(\kappa p)!}\right]^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}.$$

Możemy wobec tego dalej szacować prawą stronę nierówności (6.16) w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_{m_1,t}^{n} w_{p+1}(t,z)\right\|_{\tilde{r}} \leq B'^p C K^{n+\kappa p+\kappa} B m_1(n+\kappa+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa+\kappa p}{k}\right)\cdot \\ \cdot\sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i}\left[\frac{(\kappa p)!}{(\kappa p+i)!}\right]^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}\partial_{m_2,z}^{q-p_\kappa}(P_p)(|z|).\end{aligned}$$

Oznaczmy przez $\mathcal{K}'$ zbiór wszystkich $i\in\mathcal{K}$, dla których prawdziwa jest zależność $p_i\geq 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathcal{K}\cup\{0\}}\sum_{q\in Q_i}\left[\frac{(\kappa p)!}{(\kappa p+i)!}\right]^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}} &\leq \left[(1+\kappa)\partial_{m_2,z}^{-p_\kappa}+\sum_{i\in\mathcal{K}'}\sum_{q\in Q_i}\left[\frac{(\kappa p)!}{(\kappa p+i)!}\right]^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}\right]\leq \\ &\leq (1+\kappa)\left[\partial_{m_2,z}^{-p_\kappa}+\sum_{i\in\mathcal{K}'}\sum_{q\in Q_i}\left[\frac{(\kappa p)!}{(\kappa p+i)!}\right]^{\frac{s_2 p_\kappa}{\kappa}}\right].\end{aligned}$$

Ponadto po zastosowaniu (6.13) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{(\kappa p)!^{\frac{p_\kappa}{\kappa}}(p_\kappa p+p_i)!}{(\kappa p+i)!^{\frac{p_\kappa}{\kappa}}(p_\kappa p)!} &= \frac{(p_\kappa p+p_i)\ldots(p_\kappa p+1)}{(\kappa p+i)^{\frac{p_\kappa}{\kappa}}\ldots(\kappa p+1)^{\frac{p_\kappa}{\kappa}}} = \left(\frac{p_\kappa}{\kappa}\right)^{p_i}\frac{\left(\kappa p+\frac{\kappa p_i}{p_\kappa}\right)\ldots\left(\kappa p+\frac{\kappa}{p_\kappa}\right)}{(\kappa p+i)^{\frac{p_\kappa}{\kappa}}\ldots(\kappa p+1)^{\frac{p_\kappa}{\kappa}}} \leq \\ &\leq \left(\frac{p_\kappa}{\kappa}\right)^{p_i}\frac{(\kappa p+\kappa)^{p_i}}{(\kappa p+1)^{\frac{p_\kappa}{\kappa}i}} \leq \left(\frac{p_\kappa}{\kappa}\right)^{p_i}\frac{(\kappa p+\kappa)^{p_i}}{(\kappa p+1)^{p_i}} \leq \\ &\leq \left(\frac{p_\kappa}{\kappa}\right)^{p_\kappa}\left(1+\frac{\kappa-1}{1}\right)^{p_i} \leq p_\kappa^{p_\kappa}.\end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe oszacowania, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_{m_1,t}^{n} w_{p+1}(t,z)\right\|_{\tilde{r}} \leq B'^p C K^{n+\kappa p+\kappa} B(1+\kappa) m_1(n+\kappa+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa+\kappa p}{k}\right)\cdot \\ \cdot\left[\partial_{m_2,z}^{-p_\kappa}+\sum_{i\in\mathcal{K}'}\sum_{q\in Q_i}p_\kappa^{s_2 p_\kappa}\frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{(p_\kappa p+p_i)!^{s_2}}\partial_{m_2,z}^{q-p_\kappa}\right](P_p)(|z|).\end{aligned} \tag{6.17}$$

Wystarczy wobec tego przyjąć $B'\geq B(1+\kappa)$, aby zakończyć dowód. ■

LEMAT 6.5 *Dla każdego $z\in D_r$, gdzie $0<r<1$, i $p\in\mathbb{N}_0$ mamy*

$$P_p(|z|)\leq F^p\frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)}. \tag{6.18}$$

dla pewnej dodatniej stałej F.

Dowód: Nierówność (6.18) jest w oczywisty sposób prawdziwa dla $p = 0$. Ustalmy zatem dowolne $p \in \mathbb{N}$. Wówczas wielomian $P_p(z)$ ma postać

$$\left(\partial_{m_2,z}^{-p_\kappa} + \sum_{i\in\mathcal{K}'}\sum_{q\in Q_i} p_\kappa^{s_2 p_\kappa}\frac{(p_\kappa p - p_\kappa)!^{s_2}}{(p_\kappa p - p_\kappa + p_i)!^{s_2}}\partial_{m_2,z}^{q-p_\kappa}\right)\dots$$
$$\dots\left(\partial_{m_2,z}^{-p_\kappa} + \sum_{i\in\mathcal{K}'}\sum_{q\in Q_i} p_\kappa^{s_2 p_\kappa}\frac{1}{p_i!^{s_2}}\partial_{m_2,z}^{q-p_\kappa}\right)(P_0)(z).$$

Zapis ten możemy uprościć w następujący sposób:

$$P_p(z) = \left[\partial_{m_2,z}^{-p_\kappa p} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_j\le p}\sum_{(i_1,\dots,i_j)\in\mathcal{K}'^j}\sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\dots,q_{i_j}\in Q_{i_j}} p_\kappa^{s_2 j p_\kappa}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\prod_{s=1}^{j}\frac{(p_\kappa(l_s-1))!^{s_2}}{(p_\kappa(l_s-1)+p_{i_s})!^{s_2}}\partial_{m_2,z}^{q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}-p_\kappa p}\right]P_0(z).$$

Korzystając z powyższego, możemy oszacować $P_p(|z|)$ w następujący sposób:

$$P_p(|z|) \le \frac{|z|^{p_\kappa p}}{m_2(p_\kappa p)} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_j\le p}\sum_{(i_1,\dots,i_j)\in\mathcal{K}'^j}\sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\dots,q_{i_j}\in Q_{i_j}} p_\kappa^{s_2 j p_\kappa}\cdot$$
$$\cdot\prod_{s=1}^{j}\frac{(p_\kappa(l_s-1))!^{s_2}}{(p_\kappa(l_s-1)+p_{i_s})!^{s_2}}\frac{|z|^{p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)}}{m_2\left(p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)\right)}.$$

Z Uwagi 6.2 wynika, że $p_i < p_\kappa$ dla $i < \kappa$. Wobec tego otrzymujemy

$$p_\kappa p - \left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right) \ge p_\kappa p - \left(p_{i_1}+\cdots+p_{i_j}\right) \ge p_\kappa p - (p_\kappa - 1)\,p = p.$$

Stąd oraz z faktu, że $|z| < r < 1$, dostajemy:

$$P_p(|z|) = \left(1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_j\le p}\sum_{(i_1,\dots,i_j)\in\mathcal{K}'^j}\sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\dots,q_{i_j}\in Q_{i_j}} p_\kappa^{s_2 j p_\kappa}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\prod_{s=1}^{j}\frac{(p_\kappa(l_s-1))!^{s_2}}{(p_\kappa(l_s-1)+p_{i_s})!^{s_2}}\frac{m_2\left(p_\kappa p\right)}{m_2\left(p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)\right)}\right)\frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)}.$$

Zauważmy także, że

$$\frac{m_2\left(p_\kappa p\right)}{m_2\left(p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)\right)} \le A_2^{q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}}\frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{\left(p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)\right)!^{s_2}} \le$$

$$\leq A_2^{p_\kappa p} \frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{\left(p_\kappa\left(p-j\right)+\left(p_\kappa-q_{i_1}\right)+\cdots+\left(p_\kappa-q_{i_j}\right)\right)!^{s_2}}.$$

Po wprowadzeniu dodatkowego oznaczenia

$$\alpha_s = \begin{cases} 1 & \text{dla } i_s = \kappa \\ p_\kappa - p_{i_s} & \text{dla } i_s < \kappa \end{cases}$$

przy $s = 1, 2, \ldots, j$, uzyskujemy

$$\frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{\left(p_\kappa\left(p-j\right)+\left(p_\kappa-q_{i_1}\right)+\cdots+\left(p_\kappa-q_{i_j}\right)\right)!^{s_2}} \leq$$

$$\leq \frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{\left(p_\kappa\left(p-j\right)\right)!^{s_2}} \prod_{s=1}^{j} \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{1}{\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma\right)^{s_2}}.$$

Jednocześnie mamy też

$$\prod_{s=1}^{j} \frac{(p_\kappa(l_s-1))!^{s_2}}{(p_\kappa(l_s-1)+p_{i_s})!^{s_2}} = \prod_{s=1}^{j} \prod_{\sigma=1}^{p_{i_s}} \frac{1}{\left(p_\kappa(l_s-1)+\sigma\right)^{s_2}} \leq$$

$$\leq \prod_{s=1}^{j} \prod_{\sigma=1}^{p_{i_s}} \frac{1}{\left(p_\kappa(s-1)+\sigma\right)^{s_2}} = \frac{1}{(p_\kappa j)!^{s_2}} \prod_{s=1}^{j} B_s,$$

gdzie

$$B_s = \begin{cases} 1 & \text{dla } i_s = \kappa \\ \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \left(p_\kappa\left(s-1\right)+p_{i_s}+\sigma\right)^{s_2} & \text{dla } i_s < \kappa \end{cases}.$$

Możemy wykorzystać obie zależności, aby uzyskać

$$\prod_{s=1}^{j} \frac{(p_\kappa(l_s-1))!^{s_2}}{(p_\kappa(l_s-1)+p_{i_s})!^{s_2}} \frac{m_2\left(p_\kappa p\right)}{m_2\left(p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)\right)} \leq$$

$$\leq \frac{(p_\kappa p)!^{s_2}}{\left(p_\kappa\left(p-j\right)\right)!^{s_2}} \frac{A_2^{p_\kappa p}}{(p_\kappa j)!^{s_2}} \prod_{s=1}^{j} \left[B_s \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{1}{\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma\right)^{s_2}}\right].$$

Dla $i_s = \kappa$ mamy

$$B_s \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{1}{\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma\right)^{s_2}} = \frac{1}{\left(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1\right)^{s_2}} \leq 1.$$

Dla $i_s < \kappa$ jest

$$B_s \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{1}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma)^{s_2}} = \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{(p_\kappa(s-1)+p_{i_s}+\sigma)^{s_2}}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma)^{s_2}} =$$
$$= \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+p_\kappa(s-1)+p_{i_s}+\sigma-\alpha_1-\cdots-\alpha_{s-1})^{s_2}}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma)^{s_2}}.$$

Wobec tego mamy

$$B_s \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \frac{1}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma)^{s_2}} = \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \left(1+\frac{p_\kappa(s-1)+p_{i_s}-\alpha_1-\cdots-\alpha_{s-1}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+\sigma}\right)^{s_2} \leq$$
$$\leq \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \left(1+\frac{p_\kappa s-(p_\kappa-p_{i_s})-\alpha_1-\cdots-\alpha_{s-1}}{s}\right)^{s_2} \leq$$
$$\leq \prod_{\sigma=1}^{\alpha_s} \left(1+\frac{p_\kappa s}{s}\right)^{s_2} \leq (1+p_\kappa)^{s_2(p_\kappa-p_{i_s})}.$$

Korzystając z tych oszacowań, otrzymujemy ostatecznie:

$$\prod_{s=1}^{j} \frac{(p_\kappa(l_s-1))!^{s_2}}{(p_\kappa(l_s-1)+p_{i_s})!^{s_2}} \frac{m_2(p_\kappa p)}{m_2\left(p_\kappa p-\left(q_{i_1}+\cdots+q_{i_j}\right)\right)} \leq$$
$$\leq A_2^{p_\kappa p} \binom{p_\kappa p}{p_\kappa j}^{s_2} \prod_{s=1}^{j} (1+p_\kappa)^{s_2(p_\kappa-p_{i_s})},$$

a zatem

$$P_p(|z|) \leq \left(1+\sum_{j=1}^{p} \sum_{1\leq l_1<l_2<\cdots<l_j\leq p} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathcal{K}'^j} \sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\ldots,q_{i_j}\in Q_{i_j}} p_\kappa^{s_2 j p_\kappa} A_2^{p_\kappa p} \cdot\right.$$
$$\left. \cdot \binom{p_\kappa p}{p_\kappa j}^{s_2} \prod_{s=1}^{j} (1+p_\kappa)^{s_2(p_\kappa-p_{i_s})}\right) \frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)} \leq$$
$$\leq \left(1+\sum_{j=1}^{p} \sum_{1\leq l_1<l_2<\cdots<l_j\leq p} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathcal{K}'^j} \sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\ldots,q_{i_j}\in Q_{i_j}} p_\kappa^{s_2 j p_\kappa} A_2^{p_\kappa p} \cdot\right.$$
$$\left. \cdot 2^{s_2 p_\kappa p} (1+p_\kappa)^{s_2(p_\kappa j-p_{i_1}-\cdots-p_{i_j})}\right) \frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)} \leq$$
$$\leq \left(p_\kappa^{s_2 p_\kappa} A_2^{p_\kappa} 2^{s_2 p_\kappa} (1+p_\kappa)^{s_2(p_\kappa-1)}\right)^p \cdot$$
$$\cdot \left(1+\sum_{j=1}^{p} \sum_{1\leq l_1<l_2<\cdots<l_j\leq p} \sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathcal{K}'^j} \sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\ldots,q_{i_j}\in Q_{i_j}} 1\right) \frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)}.$$

Pozostaje jedynie znaleźć ograniczenie górne dla

$$1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_j\le p}\sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathcal{K}'^j}\sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\ldots,q_{i_j}\in Q_{i_j}}1.$$

W tym celu wystarczy zauważyć, że $|\mathcal{K}'^j|\le\kappa^j$ i $|Q_i|\le p_\kappa$ dla każdego $i\in\mathcal{K}'$. Stąd wnioskujemy, że

$$1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_j\le p}\sum_{(i_1,\ldots,i_j)\in\mathcal{K}'^j}\sum_{q_{i_1}\in Q_{i_1},\ldots,q_{i_j}\in Q_{i_j}}1\le 1+\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\kappa^j p_\kappa^j=(1+\kappa p_\kappa)^p.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$P_p(|z|)\le\left(p_\kappa^{s_2p_\kappa}A_2^{p_\kappa}2^{s_2p_\kappa}\left(1+p_\kappa\right)^{s_2(p_\kappa-1)}\left(1+\kappa p_\kappa\right)\right)^p\frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)}.$$

■

Możemy teraz przystąpić do dowodu Twierdzenia 6.2.

Dowód Twierdzenia 6.2: Korzystając z powyższych lematów otrzymujemy

$$\left\|\partial^n_{m_1,t}w_p(t,z)\right\|_{\tilde r}\le B'^pCK^{n+\kappa p}m_1(n+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa p}{k}\right)F^p\frac{|z|^p}{m_2(p_\kappa p)}$$

dla wszystkich $p\in\mathbb{N}_0,\ n\in\mathbb{N}_0,\ \tilde r=|z|$. Wobec tego

$$\sum_{p\ge0}\left\|\partial^n_{m_1,t}w_p(t,z)\right\|_{\tilde r}\le CK^nm_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\sum_{p\ge0}B'^pK^{\kappa p}\frac{m_1(n+\kappa p)\Gamma\left(1+\frac{n+\kappa p}{k}\right)}{m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)m_2(p_\kappa p)}F^p|z|^p.$$

Z (6.8) otrzymujemy

$$\sum_{p\ge0}\left\|\partial^n_{m_1,t}w_p(t,z)\right\|_{\tilde r}\le CK^n\tilde A^nm_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\sum_{p\ge0}\left(B'K^\kappa\tilde A^\kappa F|z|\right)^p. \tag{6.19}$$

Weźmy zatem $\rho=\min\left\{r,\ (B'K^\kappa\tilde A^\kappa F)^{-1}\right\}$. Wówczas dla każdego $z\in D_\rho$ ostatnia suma prawej strony wyrażenia (6.19) jest skończona. Ponadto istnieje stała $L>0$, dla której

$$\sum_{p\ge0}\left(B'K^\kappa\tilde A^\kappa F|z|\right)^p\le L\text{ dla }|z|<\rho.$$

Stąd otrzymujemy

$$\sum_{p\geq 0}\left\|\partial^n_{m_1,t}w_p(t,z)\right\|_{\tilde{r}}\leq CLK^n\tilde{A}^n m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\ \text{dla}\ z\in D_\rho,\ |z|=\tilde{r}.$$

Przyjmując $\tilde{C}=CL$ i $\tilde{K}=K\tilde{A}$, otrzymujemy dla każdego $n\in\mathbb{N}_0$ następujący wniosek:

$$\left\|\partial^n_{m_1,t}w(t,z)\right\|_{\tilde{r}}\leq\tilde{C}\tilde{K}m_1(n)\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)\ \text{dla}\ z\in D_\rho,\ |z|=\tilde{r}. \tag{6.20}$$

Dla udowodnienia prawdziwości Twierdzenia 6.2 pozostaje wykazać, że $w(t,z)$ faktycznie jest k-sumą szeregu formalnego $\hat{w}(t,z)$ w kierunku d. Ustalmy w tym celu dowolną funkcję jądrową $e(z)$ rzędu k oraz powiązaną z nią funkcję momentów $m_e(u)$. Wówczas możemy skorzystać z liniowości operatora Laplace'a oraz formalnego operatora Borela. Skoro dla dowolnego $p\geq 0$ mamy $w_p(t,z)=\mathcal{L}_{e,d}\hat{\mathcal{B}}_{m_e,t}\hat{w}_p(t,z)$, to również $w(t,z)=\sum_{p\geq 0}\mathcal{L}_{e,d}\hat{\mathcal{B}}_{m_e,t}\hat{w}_p(t,z)$. Z (6.20) wynika, że $\mathcal{B}_{e,d}w(t,z)\in\mathcal{O}(D(0,r')\times\bar{D}_r)$ dla pewnego $r'>0$ i ponadto ma wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k na pewnym sektorze S_d. Stąd i ze Stwierdzenia 2.6 wnioskujemy, że

$$\mathcal{B}_{e,d}w(t,z)=\mathcal{B}_{e,d}\sum_{p\geq 0}\mathcal{L}_{e,d}\hat{\mathcal{B}}_{m_e,t}\hat{w}_p(t,z)=\mathcal{B}_{e,d}\mathcal{L}_{e,d}\sum_{p\geq 0}\hat{\mathcal{B}}_{m_e,t}\hat{w}_p(t,z)=\hat{\mathcal{B}}_{m_e,t}\hat{w}(t,z)$$

Wobec tego i wcześniej uzyskanego wniosku, że $w(t,z)$ ma wykładnicze tempo wzrostu nie większe niż k na S_d, otrzymujemy już, że $\hat{w}(t,z)$ jest k-sumowalny w kierunku d, a $w(t,z)$ jest jego k-sumą. k-sumowalność $\hat{u}$ wynika wówczas z założeń Twierdzenia 6.2 i równości

$$\hat{u}(t,z)=\sum_{n=0}^{p_\kappa-1}u_n(t)z^n+\partial^{-p_\kappa}_{m_2,z}\partial^\kappa_{m_1,t}\hat{w}(t,z).$$

■

Łatwo można także wykazać prawdziwość twierdzenia odwrotnego do powyższego, co prowadzi bezpośrednio do głównego wyniku tego rozdziału. Jest ono analogiczne do wyników zaprezentowanych wcześniej w [2] i [19] dla klasycznych równań różniczkowych cząstkowych. W ogólniejszej wersji zostało udowodnione także w [8].

TWIERDZENIE 6.3 *Rozważmy równanie* (6.11) *wraz ze wszystkimi wcześniejszymi założeniami. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\hat{f}(t,z)\in\mathbb{E}[[t]]$ *oraz* $u_n(t)\in\mathbb{C}[[t]]$ *dla* $0\leq n\leq p_\kappa-1$ *są* k*-sumowalne w kierunku* $d\in\mathbb{R}$.

(ii) Rozwiązanie formalne $\hat{u}(t,z) \in \mathbb{E}[[t]]$ *równania* (6.11) *jest* k*-sumowalne w kierunku* d *i jego* k*-suma* $u(t,z)$ *jest rozwiązaniem analitycznym tego równania, o ile zastąpimy* $\hat{f}(t,z)$ *przez jego* k*-sumę* $f(t,z)$.

Dowód: Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (i) jest oczywista.

Większość dowodu implikacji w drugą stronę została przeprowadzona w dowodzie Twierdzenia 6.2. Aby go dokończyć, należy rozważyć odwzorowanie

$$t \mapsto u(t,z) - \sum_{i\in\mathcal{K}} \sum_{q=0}^{p_i} a_{iq}(z)\partial_{m_2,z}^q U_i(t,z) - f(t,z),$$

przy czym przez $U_i(t,z)$ dla każdego $i \in \mathcal{K}$ rozumiemy funkcję spełniającą zależność $\partial_{m_1,t} U_i(t,z) = u(t,z)$. Rozwinięciem asymptotycznym tak skonstruowanej funkcji w pewnym obszarze sektorowym $G = G_d(\alpha)$, gdzie $\alpha > \frac{\pi}{k}$, będzie szereg zerowy. Skoro tak jest, z Twierdzenia 3.1 funkcja ta musi być stała równa 0, co kończy dowód. ■

ROZDZIAŁ 7

Otwarte problemy i dalsze badania

Choć zagadnienie równań moment-różniczkowych rozwija się w ostatnich latach dynamicznie, wciąż pozostaje stosunkowo nowe. W związku z tym naturalnym wydaje się istnienie pytań, na które jak dotąd brak jednoznacznej odpowiedzi.

Poniżej nieco szerzej opisane zostały dwa główne kierunki badań nad równaniami moment-różniczkowymi i własnościami ich rozwiązań formalnych. W ostatnim podrozdziale zebrane zostały pozostałe otwarte problemy.

7.1 Problem sumowalności dla równań o współczynnikach zależnych od wszystkich zmiennych

O ile w przypadku współczynników zależnych wyłącznie od zmiennej z uogólnienie wyników z [19] dotyczących sumowalności na równania moment-różniczkowe było możliwe bez wprowadzenia dodatkowych założeń, uzależnienie współczynników także od zmiennej czasowej t nastręcza już zdecydowanie większych problemów. Taki stan rzeczy wynika z faktu, że dla operatorów m-różniczkowych nie istnieje naturalny odpowiednik wzoru Leibniza. Stąd nie jesteśmy w stanie bez wprowadzenia dodatkowych założeń oszacować normy wyrażenia postaci

$$\partial_{m_1,t}\left(b(t,z)w_p(t,z)\right).$$

Poniżej zaprezentowana została próba wprowadzenia takiego odpowiednika.

Niech m oznacza ciąg momentów rzędu $s\in(0,1]$. Załóżmy, że dla dowolnego $\alpha\in\mathbb{N}_0$ prawdziwa jest zależność

$$\partial_{m,t}^{\alpha}\left(u(t)v(t)\right)\ll\sum_{\beta=0}^{\alpha}\frac{m(\alpha)}{m(\beta)m(\alpha-\beta)}\partial_{m,t}^{\beta}u(t)\partial_{m,t}^{\alpha-\beta}v(t), \tag{7.1}$$

gdzie $u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}t^n$ i $v(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w_n}{m(n)}t^n$, a $u_n\geq 0$, $w_n\geq 0$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}_0$.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy następujące oznaczenie:

$$\widetilde{m}(n,k) = \begin{cases} \dfrac{m(n)}{m(n-k)} & \text{dla } n \geq k \\ 0 & \text{dla } n < k \end{cases}$$

Wówczas prawdziwe jest następujące stwierdzenie:

STWIERDZENIE 7.1 *Do tego, żeby dla ustalonego ciągu momentów zachodził warunek* (7.1) *potrzeba i wystarcza, aby dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}_0$ *i dla* $k = 0, 1, \ldots, n + \alpha$ *prawdziwa była nierówność*

$$\frac{m(n+\alpha)}{m(n)} \leq \sum_{\beta=0}^{\alpha} \widetilde{m}(k,\beta)\widetilde{m}(n+\alpha-k, \alpha-\beta)\frac{m(\alpha)}{m(\beta)m(\alpha-\beta)} \tag{7.2}$$

Dowód: Lewa strona wyrażenia (7.1) ma postać

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n+\alpha} \frac{u_k w_{n+\alpha-k}}{m(k)m(n+\alpha-k)}\frac{m(n+\alpha)}{m(n)} z^n, \tag{7.3}$$

a prawa

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{m(\alpha)}{m(\beta)m(\alpha-\beta)}\frac{u_{k+\beta} w_{n+\alpha-k-\beta}}{m(k)m(n-k)} z^n.$$

Zauważmy, że po użyciu warunku (7.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+\alpha} \frac{u_k w_{n+\alpha-k}}{m(k)m(n+\alpha-k)}\frac{m(n+\alpha)}{m(n)} &\leq \\ \leq \sum_{k=0}^{n+\alpha}\sum_{\beta=0}^{\alpha} &\frac{u_k w_{n+\alpha-k}}{m(k)m(n+\alpha-k)}\widetilde{m}(k,\beta)\widetilde{m}(n+\alpha-k,\alpha-\beta)\frac{m(\alpha)}{m(\beta)m(\alpha-\beta)}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Ponadto

$$\frac{\widetilde{m}(k,\beta)\widetilde{m}(n+\alpha-k,\alpha-\beta)}{m(k)m(n+\alpha-k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m(k-\beta)m(n+\beta-k)} & \text{dla } k-n \leq \beta \leq k \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wszystkie składniki po prawej stronie nierówności (7.4) możemy umieścić w tablicy o wymiarach $\alpha \times (n+\alpha)$, której cztery pierwsze wierszy przedstawione zostały na Rysunku 7.1. Zauważmy, że zwłaszcza dla dużych n wiele z rozważanych składników zeruje się.

Po zsumowaniu w pierwszej kolejności składników ze wspólnym fragmentem mianownika

$$
\begin{array}{llll}
\frac{u_0 w_{n+\alpha}}{m(0)m(n)} & & & \\[2em]
\frac{u_1 w_{n+\alpha-1}}{m(1)m(n-1)} & \frac{u_1 w_{n+\alpha-1}}{m(0)m(n)}\frac{m(\alpha)}{m(1)m(\alpha-1)} & & \\[2em]
\frac{u_2 w_{n+\alpha-2}}{m(2)m(n-2)} & \frac{u_2 w_{n+\alpha-2}}{m(1)m(n-1)}\frac{m(\alpha)}{m(1)m(\alpha-1)} & \frac{u_2 w_{n+\alpha-2}}{m(0)m(n)}\frac{m(\alpha)}{m(2)m(\alpha-2)} & \\[2em]
\frac{u_3 w_{n+\alpha-3}}{m(3)m(n-3)} & \frac{u_3 w_{n+\alpha-3}}{m(2)m(n-2)}\frac{m(\alpha)}{m(1)m(\alpha-1)} & \frac{u_3 w_{n+\alpha-3}}{m(1)m(n-1)}\frac{m(\alpha)}{m(2)m(\alpha-2)} & \frac{u_3 w_{n+\alpha-3}}{m(0)m(n)}\frac{m(\alpha)}{m(3)m(\alpha-3)} \\[2em]
\vdots & \ddots & &
\end{array}
$$

RYSUNEK 7.1

postaci $m(j)m(n-j)$ (w tych samych liniach równoległych do „przekątnej” tablicy) otrzymujemy, że prawa strona wyrażenia (7.4) jest równa

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{\alpha}\frac{m(\alpha)}{m(\beta)m(\alpha-\beta)}\frac{u_{k+\beta}w_{n+\alpha-k-\beta}}{m(k)m(n-k)},$$

co kończy dowód w jedną stronę.

Aby wykazać, że z warunku (7.1) wynika nierówność (7.2) dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ i $k = 0, 1, \ldots, n+\alpha$, wystarczy podstawić $u(t) = t^k$ i $v(t) = t^{n+\alpha-k}$. ■

UWAGA 7.1 Dla $s \in (0, 1]$ ciągi momentów postaci $(n!^s)_{n\geq 0}$ spełniają warunek (7.2).

Dowód: Dla $s = 1$ oraz dowolnych α, $n \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leq k \leq n+\alpha$ prawa strona warunku (7.2) przyjmuje postać

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha}\widetilde{m}(k,\beta)\widetilde{m}(n+\alpha-k,\alpha-\beta)\frac{(\alpha-\beta+1)\ldots(\alpha-1)\alpha}{\beta!}.$$

Dla $k = \alpha, \alpha+1, \ldots, n$ otrzymujemy

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha}\binom{k}{\beta}\binom{n+\alpha-k}{\alpha-\beta}\alpha! = \binom{n+\alpha}{\alpha}\alpha! = \frac{(n+\alpha)!}{n!}.$$

Dla $k = 0, 1, \ldots, \alpha-1$ mamy

$$\sum_{\beta=0}^{k}\binom{k}{\beta}\binom{n+\alpha-k}{\alpha-\beta}\alpha! = \frac{(n+\alpha)!}{n!}.$$

Analogiczna równość zachodzi dla $k = n+1, \ldots, n+\alpha$. Nierówność dla $s < 1$ wynika z faktu, że $(a+b)^s \leq a^s + b^s$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}_+$. ■

Niestety jak dotąd wadą tego odpowiednika wzoru Leibniza jest fakt, że jest on prawidłowo zdefiniowany wyłącznie dla szeregów formalnych. Na chwilę obecną nie został on w żaden sposób przeniesiony na sumy tych szeregów, co jest niezbędne przy badaniu sumowalności. Wydaje się, że powinno być to możliwe przy wykorzystaniu Definicji 3.5, ale jak dotąd prace nad wyprowadzeniem poprawnej definicji nadal trwają.

7.2 Uogólnienie ciągów momentów

W nieco innym kierunku podążyły badania, których wyniki zostały opublikowane w [6–8]. W tym przypadku autorzy rozszerzyli definicje ciągów momentów oraz operatorów moment-różniczkowych. Dokładniej mówiąc, w zależności (2.4) ciąg $(\Gamma_s(n))_{n\geq 0}$ zastępujemy pewnym ciągiem liczb nieujemnych $(M_n^s)_{n\geq 0}$ w taki sposób, że przyjmuje ona postać

$$a^n M_n^s \leq m(n) \leq A^n M_n^s \quad \text{dla każdego} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

przy czym dodatkowo zakładamy, że dla $(M_n)_{n\geq 0}$ spełnione są następujące warunki:

1) $M_0 = 1$,
2) M_n jest ciągiem logarytmicznie wypukłym,
3) M_n ma *ograniczone tempo wzrostu*, a zatem istnieje stała $C_1 > 0$, dla której $M_{m+n} \leq C_1 M_m M_n$ dla dowolnych $m, n \geq 0$,
4) M_n jest *silnie niequasi-analityczny*, to znaczy istnieje stała $C_2 > 0$, dla której

$$\sum_{n\geq m} \frac{M_n}{(n+1)M_{n+1}} \leq C_2 \frac{M_m}{M_{m+1}} \text{ dla każdego } m \geq 0.$$

Ciągi takie nazywamy *silnie regularnymi*[1].

Wyniki z [6] zostały uzyskane z wykorzystaniem metod analogicznych do tych z [25] i [13] i dotyczą równania będącego bezpośrednim uogólnieniem problemów omawianych we wspomnianych źródłach. Takie uogólnienie moment-różniczkowania dodatkowo otwiera nowe możliwości badań, między innymi nad zagadnieniem sumowalności dla szerszej grupy operatorów. Rezultaty takich badań zostały zaprezentowane w [7] oraz [8], a rozważania z Rozdziału 6 są ich szczególnym przypadkiem.

[1] Zastąpienie ciągów postaci $(\Gamma_s(n))_{n\geq 0}$ wpływa również na definicje funkcji jądrowych. Więcej szczegółów na przykład w [8, Definicja 7].

7.3 Inne otwarte problemy

PROBLEM 1 *Czy możliwe jest uogólnienie wyników z Twierdzeń 4.1, 5.1 i 6.3 na problemy typu Cauchy'ego-Goursata?*

Uzyskanie wyników analogicznych do zaprezentowanych w niniejszej pracy wydaje się być możliwe przy pewnych modyfikacjach metod i narzędzi z [15], [16] i [20]. Obiecujące w kontekście Twierdzenia 6.3 wydają się w szczególności normy wykorzystane w [16] ze względu na ich podobieństwo do normy zdefiniowanej w Definicji 6.1.

PROBLEM 2 *Czy możliwe jest uogólnienie wyników z Twierdzeń 4.1 i 5.1 na równania nieliniowe?*

Analogiczne rezultaty dla klasycznych równań różniczkowych cząstkowych pojawiły się już między innymi w [23, 24]. Podobnie jak przypadek problemów typu Cauchy'ego-Goursata, analiza rozwiązań nieliniowych równań moment-różniczkowych mogłaby stanowić ciekawy kierunek dalszych badań.

PROBLEM 3 *Czy możliwe jest uogólnienie wyników z Twierdzenia 6.3 na problem multisumowalności?*

Intuicyjnie przez *szereg multisumowalny*[2] rozumiemy taki szereg formalny $\hat{u}(z)$, dla którego zachodzi

$$\hat{u}(z) = \hat{u}_1(z) + \hat{u}_2(z) + \dots + \hat{u}_n(z),$$

gdzie $\hat{u}_j \in \mathbb{E}\{z\}_{k_j,d_j}$ dla pewnych $k_1 > k_2 > \ldots > k_n$ oraz $d_1, d_2, \ldots, d_n$ spełniających $|d_j - d_{j-1}| < \frac{\pi}{2k_j} - \frac{\pi}{2k_{j-1}}$ dla $1 < j \le n$.

Jak dotąd problem multisumowalności był analizowany w [10] w kontekście równań moment-różniczkowych o stałych współczynnikach oraz między innymi w [25] dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych ze zwykłym różniczkowaniem, których współczynniki zależne są od zmiennej t. Uzyskanie analogicznych wyników dla równania postaci zbliżonej do (6.11) mogłoby stanowić interesujące uzupełnienie zarówno wyników z [8], jak i tych z [19].

Na chwilę obecną bez odpowiedzi pozostają również zagadnienia dotyczące samych ciągów momentów.

PROBLEM 4 *Czy wszystkie ciągi momentów są regularne?*

Łatwo zauważyć, że wszystkie ciągi Gevreya postaci $(n!^s)_{n\geq 0}$ oraz $(\Gamma(1 + sn))_{n\geq 0}$ dla pewnego $s > 0$ są regularnymi ciągami momentów. Nie jest jednak jasne, czy istnieją jakieś ciągi momentów, które nie są regularne.

[2] Porównaj: [10, Definicja 4].

PROBLEM 5 *Czy wszystkie ciągi momentów są logarytmicznie wypukłe?*

O ciągach $(n!^s)_{n\geq 0}$ oraz $(\Gamma(1+sn))_{n\geq 0}$ wiemy także, że są logarytmicznie wypukłe. Podobnie jednak jak w przypadku regularności, i tutaj wciąż brakuje przykładu ciągu momentów, który nie ma tej własności lub dowodu, że taki ciąg nie istnieje.

ROZDZIAŁ 8

Dodatkowe twierdzenia i własności

W celu zachowania przejrzystości tekstu wszelkie techniczne lematy oraz twierdzenia niezwiązane bezpośrednio z tematyką pracy umieszczone zostały w tym rozdziale. Zostały one uporządkowane w kolejności występowania w tekście.

LEMAT 8.1 *Niech $s \geq 0$. Wówczas istnieją takie stałe dodatnie c, C, że dla każdego $x \geq s$ mamy*

$$c(1+x)^s \leq \frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x-s)} \leq C(1+x)^s.$$

Dowód: W dowodzie ponownie wykorzystamy wzór Stirlinga (2.6). Wówczas otrzymujemy

$$\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x-s)} \leq \left(\frac{1+x}{1+x-s}\right)^{\frac{1}{2}+x-s} e^{-s+1}(1+x)^s \leq e(1+x)^s$$

oraz

$$\frac{\Gamma(1+x)}{\Gamma(1+x-s)} \geq \left(\frac{1+x}{1+x-s}\right)^{\frac{1}{2}+x-s} e^{-s-1}(1+x)^s \geq e^{-s-1}(1+x)^s.$$

Wystarczy więc przyjąć $C = e$ oraz $c = e^{-s-1}$. ■

LEMAT 8.2 *Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ spełniającego warunek $\operatorname{Re} z \geq 0$ prawdziwa jest nierówność*

$$|1 - e^{-z}| \leq |z|.$$

Dowód: Skoro $\operatorname{Re} z \geq 0$, to $z = |z|e^{i\theta}$ dla pewnego $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ponadto zauważmy, że

$$1 - e^{-z} = \int_0^z e^{-\zeta}\, d\zeta.$$

Po wprowadzeniu parametryzacji $[0, |z|] \ni s \mapsto se^{i\theta}$ otrzymujemy następujące szacowanie:

$$\left|\int_0^z e^{-\zeta}\, d\zeta\right| \leq \int_0^{|z|} e^{-s\cos\theta}\, ds \leq \int_0^{|z|} ds = |z|.$$

■

TWIERDZENIE 8.1 (Zasada Phrágmena-Lindelöfa) *Niech $k > 0$ i rozważmy zbiór $S = \{z : |z| > r, \alpha < \arg z < \beta\}$ dla pewnego $r > 0$ i α, β spełniających zależność $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{k}$. Dla pewnej funkcji $f(z) \in \mathcal{O}(G, \mathbb{E})$ ciągłej na $\bar{S}$ załóżmy także, że istnieją pewne stałe dodatnie c_1, c_2, dla których*

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq c_1 \exp\left(c_2|z|^k\right) \textit{ dla } z \in S. \tag{8.1}$$

Ponadto niech dla pewnego $C > 0$ będzie

$$\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C \textit{ dla } z \in \partial S. \tag{8.2}$$

Wówczas $\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C$ również dla wszystkich $z \in S$.

Dowód: Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $S = S_0(\beta_0) \setminus \bar{D}_r$, gdzie $S_0(\beta_0)$ jest sektorem o kącie rozwarcia $\beta_0 < \frac{\pi}{k}$.

Weźmy $\kappa > k$ na tyle bliskie k, aby także $\beta_0 < \frac{\pi}{\kappa}$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ funkcja postaci $F(z) = e^{-\varepsilon z^\kappa} f(z)$ dąży do 0 dla $G \ni z \to \infty$, co wynika z założenia (8.1). Ponadto dla dostatecznie dużych $\rho > 0$ z (8.2) wynika zależność

$$\|F(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C \text{ dla } z \in \partial(S \cap D_\rho).$$

Ponieważ F jest holomorficzna, z zasady maksimum powyższe oszacowanie musi być prawdziwe także dla $z \in S \cap D_\rho$. Po przejściu do granicy przy $\varepsilon \to 0$ i $\rho \to +\infty$ otrzymujemy, że $\|f(z)\|_{\mathbb{E}} \leq C$ dla wszystkich $z \in S$, co kończy dowód[1]. ■

LEMAT 8.3 *Weźmy $p, q \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ prawdziwa jest następująca zależność*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k} \binom{n-k+q-1}{n-k} = \binom{n+p+q-1}{n}. \tag{8.3}$$

Dowód: Rozważmy x rzeczywiste takie, że $|x| < 1$. Wówczas mamy

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Zapisany w ten sposób szereg można zróżniczkować dowolną ilość razy. Po wykonaniu tej operacji $p-1$ razy otrzymujemy zależność:

$$\frac{(p-1)!}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!} x^n.$$

[1] Twierdzenie wraz z dowodem przytoczone za [1, Dodatek B]

Analogicznie możemy zatem zapisać, że

$$\frac{(p+q-1)!}{(1-x)^{p+q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p+q-1)!}{n!} x^n.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p+q-1}{n} x^n,$$

Z drugiej strony $(1-x)^{-p-q} = (1-x)^{-p}(1-x)^{-q}$. Stąd wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{p+q}} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q-1)!}{n!(q-1)!} x^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{k}\binom{n-k+q-1}{n-k} x^n,\end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

LEMAT 8.4 *Weźmy $M \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdego $n \geq M$*

$$\frac{(n-M)!}{n!} \leq \left(\frac{M}{n}\right)^M. \tag{8.4}$$

Dowód: Udowodnimy prawdziwość (8.4) metodą indukcji względem M. Dla $M = 1$ mamy

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

a więc nierówność jest prawdziwa.

Załóżmy zatem, że dla pewnego $M \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{(n-M)!}{n!} \leq \left(\frac{M}{n}\right)^M \text{ dla każdego } n \geq M.$$

Wykażemy, że analogiczna nierówność jest prawdziwa także dla $M+1$. W tym celu ustalmy dowolne $n \geq M+1$. Wówczas z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\frac{(n-M-1)!}{n!} = \frac{(n-M)!}{n!(n-M)} \leq \frac{1}{n-M}\left(\frac{M}{n}\right)^M.$$

Wystarczy teraz wykazać, że

$$\frac{1}{n-M}\left(\frac{M}{n}\right)^M \leq \left(\frac{M+1}{n}\right)^M \frac{M}{n}.$$

Zauważmy, że dla każdego $n \geq M+1$ powyższe wyrażenie jest równoważne zapisowi:

$$M\left(\frac{M+1}{M}\right)^M \geq \frac{n}{n-M},$$

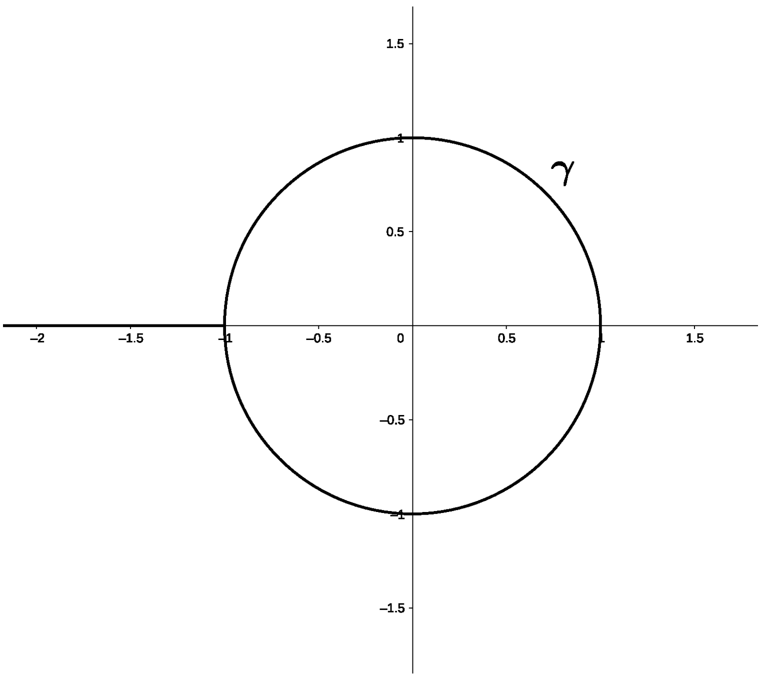
co z kolei jest równoważne wyrażeniu

$$n\left[M\left(\frac{M+1}{M}\right)^M - 1\right] \geq M^2\left(\frac{M+1}{M}\right)^M.$$

Ponieważ nierówność ma być spełniona dla wszystkich $n \geq M+1$, wystarczy, że udowodnimy ją dla $n = M+1$. Wówczas otrzymujemy

$$M\left(\frac{M+1}{M}\right)^M - M - 1 \geq 0,$$

a zależność ta jest prawdziwa dla każdego $M \geq 1$. ■



RYSUNEK 8.1 Krzywa γ.

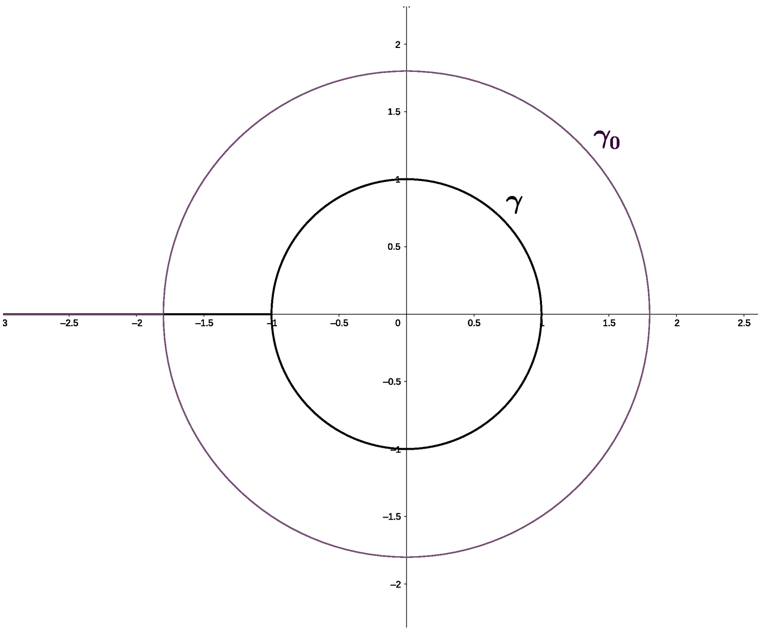
LEMAT 8.5 *Niech* $e(z),\ E(z)$ *będą parą funkcji jądrowych rzędu* $k > \frac{1}{2}$. *Niech ponadto* γ *oznacza krzywą od nieskończoności wzdłuż półprostej* $\arg z = -\pi$ *do punktu* $(-1, 0)$, *następnie wzdłuż okręgu jednostkowego o środku w zerze i z powrotem do nieskończoności wzdłuż* $\arg z = \pi$ *(jak na Rysunku 8.1). Niech* $E(z, \alpha)$, *gdzie* $\alpha \in (0,\ 2k)$, *będzie funkcją zdefiniowaną* *za pomocą wzoru*

$$E(z,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E(w)\frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha - z}\,dw \ \ \textit{dla}\ |z| < 1. \tag{8.5}$$

Wówczas $E(z,\alpha)$ przedłuża się do funkcji analitycznej na $\mathbb{C}$ i dla $|z| > 1$ prawdziwa jest zależność

$$E(z,\alpha) = \alpha^{-1}E(z^{\frac{1}{\alpha}}) + \tilde{E}(z,\alpha), \tag{8.6}$$

przy czym $\tilde{E}(z,\alpha)$ jest zadana wzorem całkowym (8.5)*, a funkcja $z\tilde{E}(z,\alpha)$ jest ograniczona dla $z \to \infty,\ z \in S_0(\frac{\pi}{k})$.*



RYSUNEK 8.2

Dowód: Dla $|z| < 1$ wystarczy zastosować odpowiednie podstawienie oraz wzór całkowy Cauchy'ego. Rozważmy zatem sytuację, gdy $|z| > 1$. Wówczas modyfikujemy krzywą γ w taki sposób, aby zamiast okręgu o promieniu 1 jej częścią był okrąg o promieniu R spełniającym $|z| < R$. Tak powstałą nową krzywą oznaczmy przez γ_0 (jak na Rysunku 8.2). Wówczas możemy zapisać $E(z,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} E(w)\frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha - z}\,dw$ jako sumę dwóch całek:

$$E(z,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma E(w)\frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha - z}\,dw + \int_{\gamma_1} E(w)\frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha - z}\,dw\right),$$

przy czym krzywa γ_1 jest zamknięta. Stąd możemy policzyć całkę wzdłuż γ_1 ze wzoru całkowego Cauchy'ego i otrzymujemy (po podstawieniu) $\alpha^{-1}E(z^{\frac{1}{\alpha}})$. Ponieważ $|z| > 1$, po krzywej γ całkujemy funkcję holomorficzną. Stąd składnik $\tilde{E}(z,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma E(w)\frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha - z}\,dw$ jest ograniczony. ∎

Bibliografia

[1] Balser W., Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Balser W., Loday-Richaud M., *Summability of solutions of the heat equation with inhomogeneous thermal conductivity in two variables*, Adv. Dyn. Syst. Appl., 4(2), 159–177, 2009.

[3] Balser W., Yoshino M., *Gevrey order of formal power series solutions of inhomogeneous partial differential equations with constant coefficients*, Funkcial. Ekvac., 53, 411–434, 2010.

[4] Canalis-Durand M., Ramis J.P., Schäfke R., Sibuya Y., *Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations*, J. Reine Angew. Math., 518, 95–129, 2000.

[5] Jiménez-Garrido J., Kamimoto S., Lastra A., Sanz J., *Multisummability in Carleman ultraholomorphic classes by means of nonzero proximate orders*, J. Math. Anal. Appl., 472(1), 627–686, 2019.

[6] Lastra M., Michalik S., Suwińska M., *Estimates of formal solutions for some generalized moment partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 500(1), 2021.

[7] Lastra M., Michalik S., Suwińska M., *Summability of formal solutions for some generalized moment partial differential equations*, Results Math., 76(22), 2021.

[8] Lastra M., Michalik S., Suwińska M., *Summability of formal solutions for a family of generalized moment integro-differential equations*, przesłane do recenzji, arXiv:2012.12323.

[9] Loday-Richaud M., Divergent Series, Summability and Resurgence II. Simple and Multiple Summability, Springer International Publishing, 2016.

[10] Michalik S., *Analytic solutions of moment partial differential equations with constant coefficients*, Funkcial. Ekvac., 56, 19–50, 2013.

[11] Michalik S., *Summability of formal solutions of linear partial differential equations with divergent initial data*, J. Math. Anal. Appl., 406, 243–260, 2013.

[12] Michalik S., *Analytic and summable solutions of inhomogeneous moment partial differen-*

tial equations, Funkcial. Ekvac., 60, 325–351, 2017.

[13] Michalik S., Suwińska M., Gevrey estimates for certain moment partial differential equations, *Complex Differential and Difference Equations*, 391–408, De Gruyter Proc. Math., 2020, arXiv:1812.10698.

[14] Michalik S., Tkacz B., *The Stokes phenomenon for some momment partial differential equations*, J. Dyn. Control Syst., 25, 573–598, 2019.

[15] Miyake M., *Global and local Goursat problems in a class of holomorphic or partially holomorphic functions*, J. Differential Equations, 39, 445–463, 1981.

[16] Miyake M., Yoshino M., *Wiener-Hopf equation and Fredholm property of the Goursat problem in Gevrey space*, Nagoya Math. J., 135, 165–196, 1994.

[17] Nagumo M., *Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen*, Jap. J. Math., 18, 41–47, 1942.

[18] Remy P., *Gevrey order and summability of formal series solutions of some classes of inhomogeneous linear partial differential equations with variable coefficients*, J. Dyn. Control Syst., 22, 693–711, 2016.

[19] Remy P., *Gevrey order and summability of formal series solutions of certain classes of inhomogeneous linear integro-differential equations with variable coefficients*, J. Dyn. Control Syst., 23, 853–878, 2017.

[20] Remy P., *Gevrey properties and summability of formal series solutions of some classes of inhomogeneous linear Cauchy-Goursat problems*, J. Dyn. Control Syst., 26, 69–108, 2020.

[21] Shirai A., *Maillet type theorem for nonlinear partial differential equations and Newton polygon*, J. Math. Soc. Japan, 53, 565–587, 2001.

[22] Suwińska M., *Gevrey estimates of formal solutions for certain moment partial differential equations with variable coefficients*, J. Dyn. Control Syst., 27, 355–370, 2021.

[23] Tahara H., *Gevrey regularity in time of solutions to nonlinear partial differential equations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 18, 67–137, 2011.

[24] Tahara H., *Maillet type theorem and Gevrey regularity in time of solutions to nonlinear partial differential equations*, Banach Center Publ., 97, 125–140, 2012.

[25] Tahara H., Yamazawa H., *Multisummability of formal solutions to the Cauchy problem for some linear partial differential equations*, J. Differential Equations, 255, 3592–3637, 2013.

[26] Tahara H., Yamazawa H., *q-analogue of summability of formal solutions of some linear q-difference-differential equations*, Opuscula Math., 35, 713–738, 2015.

[27] Whittaker E.T., Watson G.N., A course of modern analysis, Cambridge University Press, 1958.

[28] Yonemura A., *Newton polygons and formal Gevrey classes*, Publ. RIMS Kyoto Univ., 26, 197–204, 1990.

Indeks

całka ułamkowa Riemanna-Liouville'a, 40

ciąg
- logarytmicznie wypukły, 68
- momentów, 11
- o ograniczonym tempie wzrostu, 88
- silnie niequasi-analityczny, 88
- silnie regularny, 88

diagram Newtona, 43

funkcja
- całkowalna w zerze, 10
- ciągła w zerze, 7
- jądrowa, 10, 11
- jądrowa, silna, 13
- Mittaga-Lefflera, 9
- momentów, 10
  - regularna, 13
  - rzędu 0, 13
- ograniczona w zerze, 7
- różniczkowalna w zerze, 7

Lemat Watsona, 35

majoranta, 6

multisumowalność, 89

norma
- formalna, 45
- Nagumo, 55
  - zmodyfikowana, 56

obszar sektorowy, 7

operator
- m-całkowy, 20
- m-różniczkowy, 20
- Borela, 16, 20
  - formalny, 18
- Laplace'a, 15
  - formalny, 16

pochodna
- m-pochodna
  - formalna, 20
  - sumy szeregu, 39
- ułamkowa Caputo, 29, 40

rozwinięcie asymptotyczne, 29
- rzędu Gevreya s, 34

sektor
- domknięty, 6
- otwarty, 6

sumowalność, 36

szereg formalny, 5
- multisumowalny, 89

rzędu Gevreya s, 28

sumowalny, 36

wykładnicze tempo wzrostu, 8

Zasada Phrágmena-Lindelöfa, 92