

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą szeregów potęgowych

Egzamin. Zestaw A. 17 VI 2025.

Pytanie 1. Co mówi twierdzenie Frobeniusa (Twierdzenie 2.1), przedstaw szkic dowodu w przypadku gdy $l_1 - l_2 \notin \mathbb{N}_0$.

Pytanie 2. Co to jest równanie hipergeometryczne, wylicz jego punkty osobliwe i znajdź rozwiązania wokół zera. Co to jest funkcja hipergeometryczna, na jakim zbiorze jest określona i jak przy jej pomocy wyrazić funkcje $(1 - t)^{-1}$, $(1 + t)^n$ i $\arctan t$.

Pytanie 3. Przedstaw własności analityczne rozwinięć asymptotycznych. Udowodnij jedną z tych własności.

Pytanie 4. Wyjaśnij na czym polega procedura 1-sumowalności w sensie Borela. Co to jest formalna transformacja Borela (rzędu 1), transformacja Laplace'a (rzędu 1) i jak wygląda związek pomiędzy nimi. Zdefiniuj 1-sumowalność w kierunku d i 1-sumowalność dla szeregów formalnych. Podaj konkretny przykład szeregu 1-sumowalnego i zastosuj do niego procedurę 1-sumowalności w sensie Borela.

Pytanie 5. Wyjaśnij pojęcia i podaj przykłady: równania bez ruchomych punktów rozgałęzienia, równania bez ruchomych punktów istotnie osobliwych, własność Painlevé, równania Painlevé.

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą szeregów potęgowych

Egzamin. Zestaw B. 17 VI 2025.

Pytanie 1. Co mówi twierdzenie o rozwiązywaniu równań wokół punktów nieosobliwych (Twierdzenie 1.4), przedstaw szkic dowodu.

Pytanie 2. Co to jest konfluentne równanie hipergeometryczne, wylicz jego punkty osobliwe i znajdź rozwiązania wokół zera. Co to jest konfluentna funkcja hipergeometryczna, na jakim zbiorze jest określona i jak przy jej pomocy wyrazić funkcje $\exp(t)$, $\sinh(t)$ i $\cosh(t)$.

Pytanie 3. Przedstaw własności algebraiczne rozwinięć asymptotycznych. Udowodnij jedną z tych własności.

Pytanie 4. Co to są szeregi Gevreya (podaj dwa przykłady szeregów o różnych rzędach Gevreya) i rozwinięcia asymptotyczne Gevreya. Kiedy szereg Gevreya jest zbieżny w otoczeniu zera, a kiedy na całym $\mathbb{C}$. Podaj twierdzenie Ritta dla asymptotyki Gevreya i lemat Watsona.

Pytanie 5. Co to są perturbacje regularne? Przedstaw na konkretnym przykładzie metodę znajdowania rozwiązań w zależności od małego parametru ϵ .