

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą szeregów potęgowych

Kolokwium. Zestaw A. 27 V 2025.

Zadanie 1. Dla danego równania zbadaj które punkty ze zbioru $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ są nieosobliwe, osobliwe regularne lub osobliwe nieregularne:

a) $(t^2 + 1)(t + 1)(t - 2)^3 t^2 \ddot{x} + t(t + 1)^2(t + 5)\dot{x} + (t + 1)^3 x = 0,$

b) $(t^3 - 1)(t^2 - 4)\ddot{x} + 2(t - 2)^4 \dot{x} + (t - 2)x = 0.$

Zadanie 2. Znajdź dwa liniowo niezależne rozwiązania równania rozwijając je w szereg Frobeniusa wokół $t_0 = 0$:

$$2t^2 \ddot{x} - t(t + 1)\dot{x} + x = 0.$$

Zadanie 3. Sprawdź jakiego rzędu Gevrey s jest dany szereg formalny (uwaga: może się przydać wzór Stirlinga $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$):

a) $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n)^n t^{2n},$

b) $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^n} t^{3n}.$

Zadanie 4. Przeprowadź procedurę 1-sumowalności dla danego szeregu formalnego:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n)! t^{2n-1}.$$

Zadanie 5. Znajdź rozwiązanie (z resztą $O(\varepsilon^2)$) równania będącego perturbacją regularną:

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} - x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą szeregów potęgowych

Kolokwium. Zestaw B. 27 V 2025.

Zadanie 1. Dla danego równania zbadaj które punkty ze zbioru $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ są nieosobliwe, osobliwe regularne lub osobliwe nieregularne:

a) $(t^2 + 4)(t - 1)(t - 4)^3 t^2 \ddot{x} + t(t - 1)^2(t + 5)\dot{x} + (t - 1)^3 x = 0,$

b) $(t^3 + 1)(t^2 - 1)\ddot{x} + 2(t + 1)^4 \dot{x} + (t + 1)x = 0.$

Zadanie 2. Znajdź dwa liniowo niezależne rozwiązania równania rozwijając je w szereg Frobeniusa wokół $t_0 = 0$:

$$2t^2 \ddot{x} + t(t - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Zadanie 3. Sprawdź jakiego rzędu Gevreya s jest dany szereg formalny (uwaga: może się przydać wzór Stirlinga $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$):

a) $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (5n)^n t^{3n},$

b) $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} t^{2n}.$

Zadanie 4. Przeprowadź procedurę 1-sumowalności dla danego szeregu formalnego:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n)! t^{2n-1}.$$

Zadanie 5. Znajdź rozwiązanie (z resztą $O(\varepsilon^2)$) równania będącego perturbacją regularną:

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} - x = 0, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 2.$$