1 Rozwiązywanie równań wokół punktów nieosobliwych — w postaci szeregów potęgowych

Poniższy rozdział został opracowany w większości na podstawie podręcznika A. Palczewskiego [7].

Rozważmy równanie liniowe jednorodne rzędu m

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0. \tag{1.1}$$

Definicja 1.1 Punkt t_0 nazywamy *punktem nieosobliwym* równania (1.1) jeśli funkcje $a_0(t), \ldots, a_{m-1}(t)$ są analityczne w pewnym otoczeniu tego punktu.

Punkt t_0 nazywamy *punktem osobliwym* równania (1.1) jeśli funkcje $a_0(t), \ldots, a_{m-1}(t)$ mają bieguny skończonego rzędu w tym punkcie.

Punkt osobliwy t_0 nazywamy *regularnym punktem osobliwym* równania (1.1) jeśli funkcje $(t-t_0)^m a_0(t), \ldots, (t-t_0)a_{m-1}(t)$ są analityczne w pewnym otoczeniu tego punktu.

Punkt osobliwy t_0, który nie jest regularnym nazywamy *nieregularnym punktem osobliwym* równania (1.1).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do równań rzędu 2 postaci

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \tag{1.2}$$

Uwaga 1.2 Zachodzi bliski związek pomiędzy powyższym równaniem liniowym 2 rzędu a równaniem Riccatiego

$$\dot{y} = a(t)y^2 + b(t)y + c(t). \tag{1.3}$$

Niech $y(t)$ będzie rozwiązaniem równania (1.3) i niech $x(t)$ spełnia $y(t) = \frac{-\dot{x}(t)}{a(t)x(t)}$. Wówczas $x(t)$ jest rozwiązaniem równania

$$\ddot{x} - \Big(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + b(t)\Big)\dot{x} + a(t)c(t)x = 0,$$

czyli równania (1.1) dla $p(t) = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - b(t)$ i $q(t) = a(t)c(t)$.

Na odwrót, jeśli $x(t)$ spełnia (1.1) to $y = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$ spełnia równanie Riccatiego

$$\dot{y} = -y^2 - p(t)y - q(t).$$

□

Stwierdzenie 1.3 (Metoda redukcji rzędu równania) *Jeżeli $x_1(t)$ jest jednym z rozwiązań równania (1.2) to drugie liniowo niezależne rozwiązanie ma postać*

$$x_2(t) = x_1(t)\int_{c_0}^{t} \frac{e^{-P(s)}}{x_1^2(s)} d\,s, \tag{1.4}$$

gdzie $P(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $p(t)$ zaś c_0 jest dowolnie wybraną stałą.

Dowód. Drugiego liniowo niezależnego rozwiązania będziemy szukać w postaci $x_2(t) = x_1(t)u(t)$. Wstawiając do równania (1.2) dostajemy równanie liniowe 1. rzędu na $\dot{u}$

$$x_1\ddot{u} + \big(2\dot{x}_1 + p(t)x_1\big)\dot{u} = 0,$$

którego rozwiązanie jest dane wzorem $\dot{u}(t) = \frac{e^{-P(t)}}{x_1^2(t)}$, gdzie $P(t)$ jest funkcją pierwotną funkcji $p(t)$. Stąd dostajemy (1.4) dla c_0 — dowolnie wybranej stałej. Zauważmy jeszcze, że $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są liniowo niezależne. W przeciwnym bowiem przypadku musielibyśmy mieć $x_2(t) = \mathrm{const}\cdot x_1(t)$, czyli $u(t) = \mathrm{const}$ i $\dot{u} = 0$, co jest sprzeczne z postacią funkcji $u(t)$. □

Pokażemy teraz metodę rozwiązywania równania (1.1) w otoczeniu punktu nieosobliwego. Zachodzi

Twierdzenie 1.4 *Jeśli t_0 jest punktem nieosobliwym równania (1.2) to istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania tego równania, analityczne w zbiorze $\{t : |t - t_0| < R\}$, gdzie R jest mniejszym z promieni zbieżności szeregów Taylora funkcji $p(t)$ i $q(t)$ rozwiniętych wokół t_0.*

Dowód. Dzięki liniowej zamianie zmiennych, bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć $t_0 = 0$. Rozwijając funkcje $p(t)$ i $q(t)$ w szeregi potęgowe zbieżne w kole o promieniu R (dla pewnego $R > 0$) dostajemy

$$p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \qquad q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i.$$

Rozwiązania będziemy szukać w postaci szeregu potęgowego

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i. \tag{1.5}$$

Po zróżniczkowaniu szeregu otrzymamy

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)c_{i+2}t^i \\
p(t)\dot{x} &= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)c_{i+1}t^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}(j+1)c_{j+1}\Big)t^i, \\
q(t)x &= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{i} b_{i-j}c_j\Big)t^i.
\end{aligned}$$

Wstawiając te szeregi do równania różniczkowego dostajemy

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big((i+2)(i+1)c_{i+2} + \sum_{j=0}^{i} a_{i-j}(j+1)c_{j+1} + b_{i-j}c_j\Big)t^i = 0.$$

Zatem dostajemy równania na współczynniki c_i

$$(i+2)(i+1)c_{i+2} + \sum_{j=0}^{i}(a_{i-j}(j+1)c_{j+1} + b_{i-j}c_j) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Równanie to można jednoznacznie rozwiązać dla danych wartości c_0 i c_1.

Pokażemy teraz, że niezależnie od wyboru c_0 i c_1, tak wyliczone współczynniki c_i definiują szereg potęgowy (1.5) o promieniu zbieżności R. W tym celu weźmy $r < R$ i zauważmy, że dla pewnego $M > 0$ zachodzi

$$|a_i|r^i \leqslant M, \;\; |b_i|r^i \leqslant M \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdyż wyrazy szeregu zbieżnego są ograniczone i dążą do zera. Korzystając z powyższych nierówności i z równania (1.6) dostajemy oszacowanie wyrazów c_i

$$(i+2)(i+1)|c_{i+2}| \leqslant \frac{M}{r^i}\sum_{j=0}^{i}\Big((j+1)|c_{j+1}| + |c_j|\Big)r^j \leqslant \frac{M}{r^i}\sum_{j=0}^{i}\Big((j+1)|c_{j+1}| + |c_j|\Big)r^j + M|c_{i+1}|r.$$

Zdefiniujmy teraz szereg nieujemny d_i

$$d_0 = |c_0|, \quad d_1 = |c_1|, \quad (i+2)(i+1)d_{i+2} = \frac{M}{r^i}\sum_{j=0}^{i}\Big((j+1)d_{j+1} + d_j\Big)r^j + Md_{i+1}r.$$

Oczywiście $|c_i| \leqslant d_i$. Wystarczy więc wykazać, że szereg

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i \tag{1.7}$$

ma promień zbieżności r. W tym celu zauważmy, że

$$r(i+1)id_{i+1} = \frac{M}{r^{i-2}} \sum_{j=0}^{i-2} \big((j+1)d_{j+1} + d_j\big)r^j + \frac{M}{r^{i-2}}(id_i + d_{i-1})r^{i-1} + Md_i r^2 = i(i-1)d_i + Mrid_i + Md_i r^2,$$

więc

$$\frac{d_{i+1}}{d_i} = \frac{(i-1)i + rMi + r^2 M}{i(i+1)r}, \quad \text{a stąd} \quad \lim_{i\to\infty} \left|\frac{d_{i+1}}{d_i}\right| = \frac{1}{r}.$$

Zatem szereg (1.7) ma promień zbieżności r. Z dowolności wyboru $r < R$ szereg (1.5) ma promień zbieżności R. Oznacza to, że szereg (1.5) definiuje rozwiązania równania (1.1) dla dowolnych c_0 i c_1.

Zauważmy, że $c_0 = x(0)$ i $c_1 = \dot{x}(0)$. Aby znaleźć dwa rozwiązania liniowo niezależne wystarczy więc wybrać takie dwie pary wartości $(c_0^{(1)}, c_1^{(1)})$ i $(c_0^{(2)}, c_1^{(2)})$, żeby ich wronskian był niezerowy, tzn.

$$\begin{vmatrix} c_0^{(1)} & c_1^{(1)} \\ c_0^{(2)} & c_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

W podobny sposób można wykazać odpowiednik Twierdzenia 1.4 dla równań liniowych jednorodnych rzędu m o analitycznych współczynnikach, czy — równoważnie — dla układów m równań liniowych jednorodnych rzędu 1 o analitycznych współczynnikach macierzy:

Twierdzenie 1.5 *Niech $A(t)$ będzie nieosobliwą macierzą $m \times m$ o analitycznych współczynnikach w otoczeniu punktu t_0. Wówczas istnieje m liniowo niezależnych rozwiązań układu m równań*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \textit{dla} \quad x = (x_1, \ldots, x_m).$$

Co więcej rozwiązania te są analityczne w zbiorze $\{t : \ |t - t_0| < R\}$, gdzie R jest najmniejszym z promieni zbieżności szeregów Taylora współczynników $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \ldots, m$) macierzy $A(t)$, rozwiniętych wokół t_0.

Ćwiczenia

1. Stosując metodę redukcji rzędu równania znajdź rozwiązania ogólne równań
   a) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = e^{-2t}$,
   b) $t^2\ddot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = t^2$,
   c) $t\ddot{x} - \dot{x} + 4t^3 x = 0$ jeśli $x_1(t) = \sin(t^2)$.
2. Dokonaj klasyfikacji wszystkich punktów osobliwych równań
   a) $(t^2+1)(t-4)^3\ddot{x} + (t-4)^2\dot{x} + x = 0$,
   b) $t^2(t-2)\ddot{x} + 3(t-2)\dot{x} + x = 0$,
   c) $t^2(t-4)^2\ddot{x} + 3t\dot{x} - (t-4)x = 0$,
   d) $(1+4t^2)^2\ddot{x} + 6t\dot{x} - 9x = 0$.
3. Znajdź rozwiązania równań metodą rozwijania w szereg potęgowy wokół $t_0 = 0$. Na jakim zbiorze to rozwiązanie jest określone?

   a) równanie Hermite'a $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2px = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ — stała;

   b) równanie Airy'ego $\ddot{x} - tx = 0$;

   c) $(1-4t^2)\ddot{x} + 6t\dot{x} - 4x = 0$;

   d) $\ddot{x} + t\dot{x} + 3x = t^2$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.