

6 Konfluentne równanie hipergeometryczne

Poniższy rozdział został opracowany na podstawie monografii E. Hille’a [3] i preprintu B. Ziemiana [11]. Nieco inaczej zdefiniowane konfluentne równanie hipergeometryczne można znaleźć w książce E.T. Whittakera i G.N. Watsona [10].

Na początek wróćmy do równania hipergeometrycznego

$$t(1-t)\ddot{x} + (c - (a+b+1)t)\dot{x} - abx = 0.$$

Podstawmy $t = s/b$. Wówczas

$$\frac{dx}{ds} = \dot{x} \frac{1}{b}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \ddot{x} \frac{1}{b^2}$$

i równanie przyjmie postać

$$\frac{s}{b}(1 - \frac{s}{b})b^2 \frac{d^2x}{ds^2} + (c - (a+b+1)\frac{s}{b})b \frac{dx}{ds} - abx = 0.$$

Wstawiając t zamiast s i dzieląc obie strony przez b dostajemy

$$(6.1) \quad t(1 - \frac{t}{b})\ddot{x} + (c - \frac{a+b+1}{b}t)\dot{x} - ax = 0.$$

Ostatecznie, przechodząc z $|b|$ do nieskończoności otrzymujemy

$$(6.2) \quad t\ddot{x} + (c - t)\dot{x} - ax = 0.$$

Definicja 6.1 Równanie (6.2) nazywamy *konfluentnym równaniem hipergeometrycznym* lub inaczej *równaniem Kummera*.

Zajmiemy się teraz badaniem punktów osobliwych tego równania. Przypomnijmy, że równanie hipergeometryczne ma dokładnie trzy punkty osobliwe i wszystkie regularne (dla $t = 0, 1, \infty$). Natomiast równanie (6.1) ma punkty regularne osobliwe (dla $s = tb = 0, b, \infty$). Biorąc $|b| \rightarrow \infty$ dostajemy, że dwie regularne osobliwości — w b i ∞ — przechodzą do wspólnej granicy („zlewają się”) równej ∞ . Proces przejście do wspólnej granicy nazywamy *metodą konfluencji*, a otrzymane po przejściu granicznym równanie nazywamy *formą konfluentną* równanie wyjściowego (stąd nazwa konfluentne równanie hipergeometryczne).

Równanie (6.2) ma zatem osobliwości w punktach $t = 0$ i $t = \infty$. Dla $t = 0$ mamy punkt osobliwy regularny, a co dla $t = \infty$? Zauważmy, że w nieskończoności nie jest analityczna funkcja $t \mapsto tp(t) = c - t$ (bo nie jest ograniczona w nieskończoności). Zatem na podstawie Stwierdzenia 3.2 punkt $t = \infty$ jest punktem osobliwym nieregularnym. Oznacza to, że w wyniku przejścia granicznego ($|b| \rightarrow \infty$) dwie osobliwości regularne w b i ∞ „zlały się” w jedną osobliwość nieregularną w ∞ .

Postaramy się teraz znaleźć rozwiązanie równania (6.2). W tym celu zauważmy, że rozwiązanie (6.1) ma postać

$${}_2F_1(a, b; c; \frac{t}{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \left(\frac{t}{b}\right)^n \quad \text{dla } |t| < |b|, \quad c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

Przechodząc z $|b|$ do nieskończoności dostajemy dla $|t| < |b|$

$$\lim_{|b| \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; \frac{t}{b}) = \lim_{|b| \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \left(\frac{t}{b}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} t^n \lim_{|b| \rightarrow \infty} \frac{(b)_n}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} t^n = {}_1F_1(a; c; t).$$

Zatem jednym z rozwiązań konfluentnego równania hipergeometrycznego jest funkcja hipergeometryczna typu $(1, 1)$, zwana *konfluentną funkcją hipergeometryczną*, która jest postaci

$$(6.3) \quad x_1(t) = {}_1F_1(a; c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} t^n.$$

Zauważmy, że promień zbieżności szeregu ${}_1F_1$ wynosi nieskończoność (to wynika zarówno z postaci tego szeregu jak i z faktu, że nie ma innych osobliwości poza 0 i ∞). Zatem rozwiązanie $x_1(t)$ jest funkcją całkowitą na $\mathbb{C}$.

Przypatrzmy się jeszcze bliżej rozwiązaniom dla $a = -n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $x_1(t) = {}_1F_1(-n; c; t)$ jest wielomianem stopnia n . Przyjmując $c = 1 + \alpha$ możemy zapisać

$${}_1F_1(-n; 1 + \alpha; t) = \binom{n + \alpha}{n} L_n^{(\alpha)}(t),$$

gdzie $L_n^{(\alpha)}(t)$ będziemy nazywać n -tym wielomianem Laguerre'a rzędu α .

W szczególności dla $\alpha = 0$ dostajemy n -ty wielomian Laguerre'a

$$L_n(t) = {}_1F_1(-n; 1; t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n)_i}{(i!)^2} t^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(-t)^i}{i!}.$$

Oczywiście spełnia on równanie

$$t\ddot{x} + (1 - t)\dot{x} + nx = 0.$$

Wielomiany Laguerre'a można wyrazić również za pomocą wzoru

$$(6.4) \quad n!L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}).$$

Wielomiany te są ortogonalne

$$\int_0^{\infty} e^{-t} L_m(t) L_n(t) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}.$$

Wróćmy teraz do ogólnej postaci konfluentnego równania hipergeometrycznego (6.2). Zauważmy, że dla $t = 0$ równanie indeksowe ma pierwiastki w 0 i $1 - c$. Również drugie rozwiązanie bazowe w otoczeniu zera możemy znaleźć korzystając z rozwiązania równania hipergeometrycznego. Załóżmy zatem, że $c \notin \mathbb{Z}$. Wówczas drugie rozwiązanie ma postać

$$(6.5) \quad x_2(t) = t^{1-c} {}_1F_1(a + 1 - c; 2 - c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + 1 - c)_n}{n!(2 - c)_n} t^{n+1-c}.$$

W przypadku $c \in \mathbb{Z}$ drugie rozwiązanie może być postaci (6.5) lub też postaci logarytmicznej.

Zauważmy, że $x_1(t)$ jest jedynym rozwiązaniem (z dokładnością do mnożenia przez stałą), które jest funkcją całkowitą ($x_2(t)$ nie jest analityczne w zerze).

Stwierdzenie 6.2 (Transformacja Kummera) Dla $t \in \mathbb{C}$ i $c \neq 0, -1, -2, \dots$ zachodzi wzór

$$(6.6) \quad {}_1F_1(a; c; t) = e^t {}_1F_1(c - a; c; -t).$$

Dowód. Niech $x(t) = {}_1F_1(a; c; t)$ będzie rozwiązaniem konfluentnego równania hipergeometrycznego (6.2). Podstawmy $x(t) = e^t y(-t)$ i sprawdźmy jakie równanie musi spełniać $y(t)$. Mamy

$$\dot{x} = e^t y(-t) - e^t \dot{y}(-t), \quad \ddot{x}(t) = e^t y(-t) - e^t \dot{y}(-t) + e^t \ddot{y}(-t).$$

Czyli $y(t)$ spełnia następujące równanie

$$t\ddot{y}(-t) + (-c - t)\dot{y}(-t) + (c - a)y(-t) = 0, \quad \text{a po zamianie } -t \text{ na } t: \quad t\ddot{y}(t) + (c - t)\dot{y}(t) - (c - a)y(t) = 0.$$

Zatem $y(t)$ spełnia konfluentne równanie hipergeometryczne jeśli zamiast a weźmiemy $c - a$. Co więcej, ponieważ $y(t) = e^t x(-t)$, to $y(t)$ musi być funkcją całkowitą na $\mathbb{C}$ (bo $x(t)$ jest całkowite) oraz $y(0) = x(0) = 1$. Oznacza to, że $y(t) = {}_1F_1(c - a; c; -t)$, a stąd dostajemy (6.6). $\square$

Stwierdzenie 6.3 Dla $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$ zachodzi

$$(6.7) \quad {}_1F_1(a; c; t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c - a)} \int_0^1 e^{ts} s^{a-1} (1 - s)^{c-a-1} ds.$$

Dowód. W dowodzie wykorzystamy funkcję beta Eulera, zdefiniowaną jako

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt \quad \text{dla} \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$$

i jej związek z funkcją gamma Eulera:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{ts} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ts)^n}{n!} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 s^{a+n-1} (1-s)^{c-a-1} ds \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(a+n, c-a)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)n!} t^n. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ponieważ $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, to całka po lewej stronie jest skończona, możemy dokonać zamiany kolejności całkowania i brania sumy szeregu oraz funkcja $B(a+n, c-a)$ jest dobrze określona dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Aby zakończyć dowód zauważmy, że

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} t^n = {}_1F_1(a; c; t).$$

□

Wiele funkcji specjalnych można wyrazić za pomocą rozwiązań konfluentnego równania hipergeometrycznego. Jako przykład weźmy funkcję błędu zdefiniowaną jako

$$\operatorname{Erf}(y) = \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Po zamianie zmiennej $t = y\sqrt{\alpha}$ i wykorzystaniu wzoru (6.7) dostajemy

$$\operatorname{Erf}(y) = \frac{y}{2} \int_0^1 \frac{e^{-y^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = \frac{y}{2} \int_0^1 e^{(-y^2)\alpha} \alpha^{\frac{1}{2}-1} (1-\alpha)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1} d\alpha = \frac{y}{2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -y^2\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = y \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -y^2\right).$$

Ćwiczenia

1. Wyprowadź wzory (6.3) i (6.5) na rozwiązania $x_1(t)$ i $x_2(t)$ równania (6.2) stosując metodę szeregów Frobeniusa.
2. Wykaż wzór (6.4) na wielomiany Laguerre'a.
3. Udowodnij, że $\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = (1-t)^{-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)$.
4. Korzystając z (6.4) wykaż własność ortogonalności dla wielomianów Laguerre'a.
5. Wyraż za pomocą rozwiązań konfluentnego równania hipergeometrycznego następujące funkcje:
 - a) $e^t, \sin t, \cos t, \sinh t, \cosh t$;
 - b) niekompletną funkcję gamma $\gamma(a, y) = \int_0^y e^{-t} t^{a-1} dt$;
 - c) całki Fresnela $S(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ i $C(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$.

Literatura

- [1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.
- [2] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.
- [3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.
- [4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.
- [5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.
- [6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.
- [7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.
- [8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.
- [9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część I*, PWN, Warszawa 1967.
- [10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część II*, PWN, Warszawa 1968.
- [11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.