

7 Równanie Bessela

Rozdział ten został opracowany na podstawie monografii E. Hille'a [3] i książki E.T. Whittakera i G.N. Watsona [10].

Definicja 7.1 *Równaniem różniczkowym Bessela* nazywamy równanie

$$(7.1) \quad t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - p^2)x = 0, \quad \text{gdzie } p \geq 0.$$

Nazwa pochodzi od Friedricha Wilhelma Bessela (1784–1848), który zajmował się tym równaniem podczas badania zaburzeń ruchu planet po orbitach.

Równanie Bessela jest jednym z najsłynniejszych równań różniczkowych zwyczajnych. Pojawia się ono w wielu zagadnieniach fizyki matematycznej, astronomii i techniki (np. przy opisie amplitudy drgań kulistej membrany, czy temperatury wewnątrz jednorodnej, stygnącej kuli).

Punktami osobliwymi są 0 i ∞ . Punkt $t = 0$ jest punktem osobliwym regularnym. Aby sprawdzić charakter punktu osobliwego dla $t = \infty$, zbadajmy analityczność w nieskończoności funkcji:

$t \mapsto tp(t) = 1$ — funkcja analityczna w nieskończoności;

$t \mapsto t^2q(t) = t^2 - p^2 \rightarrow \infty$ jeśli $t \rightarrow \infty$ — funkcja nie jest ograniczona w nieskończoności, więc nie jest też tam analityczna.

Zatem $t = \infty$ jest punktem osobliwym nieregularnym.

Znajdziemy rozwiązania wokół zera metodą szeregów Frobeniusa. Będziemy szukać rozwiązań postaci $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+l}$. Wstawiając do (7.1) dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+l)(n+l-1)a_n t^{n+l} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+l)a_n t^{n+l} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n+l} - \sum_{n=0}^{\infty} p^2 a_n t^{n+l}.$$

Stąd dostajemy równanie indeksowe

$$(n=0) \quad l(l-1) + l - p^2 = 0 \quad \text{o pierwiastkach } l_1 = p, l_2 = -p$$

oraz zależność rekurencyjną

$$(n > 1) \quad \left((n+l)^2 - p^2\right)a_n = -a_{n-2} \quad \text{czyli} \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+l-p)(n+l+p)}.$$

Wobec tego dla $l = p$ dostajemy

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2n \cdot (2n-2) \cdots 2 \cdot (2n+2p) \cdots (2+2p)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+p)_n} \quad \text{oraz} \quad x_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1+p)_n} t^{2n}.$$

Podobnie dla $l = -p$ dostajemy

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1-p)_n} \quad \text{oraz} \quad x_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (1-p)_n} t^{2n}.$$

Przyjmując za a_0 odpowiednio $\frac{1}{2^p \Gamma(1+p)}$ i $\frac{1}{2^{-p} \Gamma(1-p)}$ dostajemy rozwiązania równania (7.1)

$$(7.2) \quad J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+p+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} \quad \text{i} \quad J_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1-p+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p},$$

które będziemy nazywać *funkcjami Bessela* (lub inaczej: *funkcjami walcowymi*) *pierwszego rodzaju rzędu p i $-p$* .

Jeżeli $2p \notin \mathbb{Z}$ to rozwiązania $J_p(t)$ i $J_{-p}(t)$ są liniowo niezależne. Wobec tego rozwiązanie ogólne ma postać

$$(7.3) \quad x(t) = A J_p(t) + B J_{-p}(t), \quad \text{gdzie } A, B \text{ — stałe.}$$

Załóżmy teraz, że $2p \in \mathbb{Z}$ ale $p \notin \mathbb{Z}$. Wówczas $J_{-p}(t)$ jest nieograniczony w otoczeniu zera, zaś $J_p(t)$ jest ograniczone. Oznacza to, że obydwa rozwiązania są liniowo niezależne i wobec tego również zachodzi (7.3).

Przypadek $p \in \mathbb{N}_0$ jest trudniejszy. Jeśli $p = m$, to

$$J_{-m}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/2)^{2n-m}}{n!(n-m)!} = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/2)^{2n-m}}{n!(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(t/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!} = (-1)^m J_m(t),$$

a zatem funkcje $J_m(t)$ i $J_{-m}(t)$ są liniowo zależne. Oznacza to, że dla $p \in \mathbb{N}_0$ drugie liniowo niezależne rozwiązanie (oprócz $J_p(t)$) musi w swoim rozwinięciu zawierać logarytmy. Takie rozwiązania będziemy nazywać *funkcjami Bessela drugiego rodzaju*. Najczęściej spotyka się następujące takie funkcje (różnią się one pomiędzy sobą o stałą):

1) Funkcja wprowadzona przez Hankela

$$\tilde{Y}_p(t) = \pi e^{\pi i} \frac{J_p(t) \cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin 2p\pi} \quad \text{dla } p \notin \mathbb{Z}.$$

Natomiast dla $p = m \in \mathbb{Z}$ funkcję tę definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_m(t) &= \lim_{p \rightarrow m} \tilde{Y}_p(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi e^{(m+\epsilon)\pi i} \frac{J_{m+\epsilon}(t) \cos(m+\epsilon)\pi - J_{-m-\epsilon}(t)}{\sin 2(m+\epsilon)\pi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi e^{m\pi i}}{\sin 2\epsilon\pi} (J_{m+\epsilon}(t)(-1)^m - J_{-m-\epsilon}(t)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} (J_{m+\epsilon}(t) - (-1)^m J_{-m-\epsilon}(t)). \end{aligned}$$

2) Funkcja Webersa

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \frac{J_p(t) \cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin p\pi} \quad \text{dla } p \notin \mathbb{Z} \\ Y_m(t) &= \lim_{p \rightarrow m} \frac{J_p(t) \cos p\pi - J_{-p}(t)}{\sin p\pi} \quad \text{dla } m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zachodzi związek

$$Y_p(t) = \frac{\tilde{Y}_p(t) \cos p\pi}{\pi e^{p\pi i}}.$$

Można wykazać, że

$$(7.4) \quad Y_m(t) = - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m-n-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{-m+2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{m+2n} (2 \ln(t/2) + 2\gamma - H_{m+n} - H_n),$$

gdzie γ — stała Eulera.

Zachodzą następujące wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela:

$$(7.5) \quad \text{I. } tJ_{p+1}(t) - 2pJ_p(t) + tJ_{p-1}(t) = 0, \quad \text{II. } J'_p(t) = -\frac{p}{t}J_p(t) + J_{p-1}(t), \quad \text{III. } J'_p(t) = \frac{1}{2}(J_{p-1}(t) - J_{p+1}(t)).$$

Takie same tożsamości są spełnione przez funkcje Bessela drugiego rodzaju $Y(t)$ i $\tilde{Y}(t)$.

Zajmiemy się teraz funkcjami Bessela dla argumentu urojonego. Przypuśćmy więc, że t występujące w równaniu Bessela (7.1) jest czysto urojone, tzn. $t = is$, $s \in \mathbb{R}$. Po tej zamianie zmiennych dostaniemy równanie

$$(7.6) \quad s^2 \ddot{x} + s\dot{x} - (s^2 + p^2)x = 0, \quad \text{gdzie } p \geq 0.$$

Definicja 7.2 Równanie (7.6) nazywamy *zmodyfikowanym równaniem Bessela*.

Podobnie jak w przypadku zwykłego równania Bessela znajdziemy rozwiązanie metodą szeregów Frobeniusa. Równanie indeksowe ma postać $l(l-1) + l - p^2 = 0$ i rozwiązaniami są $l_1 = p$, $l_2 = -p$. Natomiast zależność rekurencyjna ma postać $((n+l)^2 - p^2)a_n = a_{n-2}$. Rozwiązaniami są funkcje

$$(7.7) \quad I_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1+p+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p} \quad \text{ i } \quad I_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1-p+n)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-p},$$

które będziemy nazywać *zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rodzaju rzędu p i $-p$* .

Zachodzi zależność

$$I_p(t) = i^{-p} J_p(it).$$

Dlatego też I_p spełnia te same wzory rekurencyjne co $J_p(t)$. Mamy również dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$

$$I_{-m}(y) = J_{-m}(iy)i^m = (-1)^m J_m(iy)i^m = J_m(iy)(i)^{-m} = I_m(y).$$

Zatem jeśli $p \in \mathbb{Z}$, to musimy więc wziąć *zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju* zdefiniowaną jako

$$(7.8) \quad K_p(t) = \frac{1}{2}\pi \left(I_{-p}(t) - I_p(t) \right) \operatorname{ctg} p\pi \quad \text{dla } p \notin \mathbb{Z}; \quad K_m(t) = \lim_{p \rightarrow m} K_p(t) \quad \text{dla } m \in \mathbb{Z}.$$

Stwierdzenie 7.3 (Schlömlich) *Zachodzi wzór*

$$(7.9) \quad e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n.$$

Dowód. Przedstawiając lewą stronę (7.9) jako iloczyn szeregów potęgowych dostajemy

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{-m}}{m!} \left(\frac{z}{2} \right)^m \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z)t^n,$$

gdzie

$$a_n(z) = \sum_{k,m \geq 0, k-m=n} \frac{(-1)^m}{k!m!} \left(\frac{z}{2} \right)^{k+m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!m!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+n} = J_n(z).$$

□

Korzystając ze Stwierdzenia 7.3 wykażemy

Stwierdzenie 7.4 *Zachodzą następujące wzory i relacje*

$$(7.10) \quad e^y = I_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(y) \quad \text{dla każdego } y \in \mathbb{R};$$

$$(7.11) \quad |I_0(y)| < e^{|y|}, \quad |I_n(y)| < \frac{1}{2}e^{|y|} \quad \text{dla każdego } y \in \mathbb{R};$$

$$(7.12) \quad e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)e^{in\theta} \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R};$$

$$(7.13) \quad J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - n\theta) d\theta \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z};$$

$$(7.14) \quad |J_n(x)| < 1 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z};$$

$$(7.15) \quad I_0(2y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(x+iy)|^2 \quad \text{dla każdego } x, y \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$(7.16) \quad |J_0(x+iy)| < e^{|y|}, \quad |J_n(x+iy)| < \frac{1}{\sqrt{2}}e^{|y|} \quad \text{dla każdego } x, y \in \mathbb{R};$$

$$(7.17) \quad J_0(z)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)^2 = 1 \quad \text{dla każdego } z \in \mathbb{C}.$$

Dowód. Wstawiając do równania (7.9) $z = iy$ i $t = -i$ mamy

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{1}{2}iy(-2i)} = e^y \quad \text{ i } \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(iy)(-i)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(y) = I_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(y),$$

a stąd dostajemy (7.10). Bezpośrednio z (7.10) wynika (7.11). Wstawiając teraz do równania (7.9) $t = e^{i\theta}$ mamy

$$e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{1}{2}z(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} = e^{iz \sin \theta} \quad \text{ i } \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)e^{in\theta},$$

a stąd dostajemy (7.12). Zauważmy, że wzór (7.12) przedstawia rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $z \mapsto e^{iz \sin \theta}$ o współczynnikach $J_n(z)$. Oznacza to, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ i $z \in \mathbb{C}$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z \sin \theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} e^{i(z \sin \theta - n\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(z \sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \theta - n\theta) d\theta,$$

a zatem zachodzi (7.13). Jeśli skorzystamy ze wzoru (7.13) biorąc $z = x \in \mathbb{R}$, to dostaniemy oszacowanie (7.14). Zauważmy dalej, że funkcja $\theta \mapsto e^{iz \sin \theta} \in L^2(-\pi, \pi)$, więc dzięki (7.13) dla $z = x + iy$ zachodzi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{iz \sin \theta}|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2y \sin \theta} d\theta = 2\pi J_0(2iy) = 2\pi I_0(2y).$$

Z drugiej strony, korzystając z (7.12) i z własności szeregów Fouriera

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{iz \sin \theta}|^2 d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{J_n(z)}e^{-in\theta} \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(z)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(z)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |J_n(x + iy)|^2, \end{aligned}$$

a stąd dostajemy (7.15). Korzystając z (7.15) i z (7.11) mamy oszacowanie

$$|J_0(x + iy)|^2 \leq |I_0(2y)| \leq e^{|2y|} \quad \text{ oraz } \quad 2|J_n(x + iy)|^2 \leq |I_0(2y)| \leq e^{|2y|},$$

z którego wynika (7.16). Wstawiając $y = 0$ do (7.15) dostajemy, że

$$(7.18) \quad J_0(x)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)^2 = I_0(0) = 1.$$

Zauważmy, że lewa strona (7.18) jest analityczna dla $x \in \mathbb{R}$ i przedłuża się do funkcji analitycznej dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$. Z jednoznaczności funkcji analitycznej, funkcja po przedłużeniu musi nadal być stale równa jeden. A to dowodzi (7.17). □

Ćwiczenia

1. Wykaż, że prawa strona (7.4) jest rozwiązaniem równania Bessela.
2. Wyprowadź wzory rekurencyjne (7.5).
3. Znaleźć rozwiązania ogólne równania (tzn. wyrazić je za pomocą funkcji Bessela):
 - a) $\ddot{x} + \frac{3}{t}\dot{x} + (k^2 + \frac{1}{t^2})x = 0$ (wskazówka: podstawić $x(t) = t^{-1}y(t)$),
 - b) $t\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{4}x = 0$ (wskazówka: podstawić $t = s^2$),
 - c) $\ddot{x} + \frac{1}{t}\dot{x} + 16t^6x = 0$ (wskazówka: podstawić $s = t^4$),
 - d) $t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} + (9t^2 + \frac{1}{4})x = 0$ (wskazówka: podstawić $x(t) = t^{-\frac{1}{2}}y(t)$),
 - e) $\ddot{x} - tx = 0$ (wskazówka: podstawić $x(s) = s^{\frac{1}{3}}y(s)$ oraz $s = t^{\frac{3}{2}}$),
 - f) $\ddot{x} + \frac{4}{t}\dot{x} - (4k^2 + \frac{27}{4t^2})x = 0$ (wskazówka: podstawić $x(t) = t^{-\frac{3}{2}}y(t)$).
4. Znaleźć rozwiązanie równania (tzn. wyrazić je za pomocą funkcji Bessela) spełniające dane warunki brzegowe:
 - a) $t^2\ddot{x} + t\dot{x} - (9t^2 + 1)x = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 5$.

Literatura

- [1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.
- [2] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.
- [3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.
- [4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.
- [5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.
- [6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.
- [7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.
- [8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.
- [9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część I*, PWN, Warszawa 1967.
- [10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część II*, PWN, Warszawa 1968.
- [11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.