8 Problem Riemanna–Hilberta

Prezentowany materiał pochodzi głównie z pracy B. Ziemiana [11] i książki E. Hille'a [3]. Więcej o problemie Riemanna-Hilberta można dowiedzieć się z poświęconej temu zgadnieniu pracy D. Anosova i A. Bolibrucha [1]. W szczególności tam też można znaleźć konstrukcję kontrprzykładu Bolibrucha będącego negatywną odpowiedzią na problem postawiony przez Hilberta.

8.1 Przedłużenie analityczne

Definicja 8.1 Niech na obszarach $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ będą zadane funkcje holomorficzne $f_1(z) \in \mathcal{O}(D_1)$ i $f_2(z) \in \mathcal{O}(D_2)$ równe na części wspólnej $f_1(z) = f_2(z)$ dla $z \in D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Mówimy wówczas, że każda z funkcji jest *bezpośrednim przedłużeniem analitycznym* drugiej.

Pojęcie przedłużenia analitycznego daje się w naturalny sposób uogólnić:

Definicja 8.2 Niech będzie dany skończony ciąg funkcji $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ analitycznych odpowiednio na obszarach $D_1, D_2, \ldots, D_n$ i niech każda następna funkcja będzie bezpośrednim przedłużeniem analitycznym poprzedniej. Mówimy wówczas, że funkcja $f_n(z)$ jest *pośrednim przedłużeniem analitycznym* funkcji $f_1(z)$.

Dla pośredniego przedłużenia analitycznego możliwe są dwa przypadki:

1) W części wspólnej każdego z dwóch obszarów D_i i D_k funkcje $f_i(z)$ i $f_k(z)$ są identyczne. Wówczas na $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ mamy określoną jedną funkcję analityczną $f(z)$, taką że $f_i(z) = f(z)$ dla $z \in D_i$.

2) W części wspólnej dwóch obszarów, np. D_1 i D_n mamy $f_1(z) \neq f_n(z)$. Wtedy na obszarze $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ nie jest określona jedna funkcja, a mówimy, że $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ są *gałęziami jednej funkcji wieloznacznej*.

Zamiast o funkcji wieloznacznej możemy mówić o funkcji jednoznacznej na *powierzchni Riemanna* danej funkcji. Na przykład dla $f(z) = \sqrt{z}$ powierzchnia Riemanna jest dwulistna, a dla $f(z) = \ln z$ powierzchnia Riemanna ma nieskończenie wiele liści.

Wprowadźmy jeszcze pojęcie przedłużenia analitycznego wzdłuż drogi.

Definicja 8.3 Niech $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ będzie drogą w $\mathbb{C}$ i niech będzie dany skończony ciąg funkcji $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ analitycznych odpowiednio na obszarach $D_1, D_2, \ldots, D_n$ i niech każda następna funkcja będzie bezpośrednim przedłużeniem analitycznym poprzedniej. Jeśli dodatkowo założymy, że dla pewnych liczb $0 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 1$ zachodzi $\gamma(a_i) \in D_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ oraz $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset D_i \cup D_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ to mówimy, że funkcja $f_1(z) \in \mathcal{O}(D_1)$ *przedłuża się analitycznie wzdłuż drogi* γ do funkcji $f_n(z) \in \mathcal{O}(D_n)$.

Zauważmy, że jeśli funkcja f_1 przedłuża się analitycznie wzdłuż drogi γ do funkcji f_n to wówczas f_n jest pośrednim przedłużeniem analitycznym funkcji f_1.

Ponadto, jeśli mamy dwie drogi γ_1 i γ_2 o tych samych końcach i spełniające te same warunki z Definicji 8.3 to oczywiście dostaniemy po przedłużeniu f_1 tę samą funkcję f_n.

8.2 Grupa podstawowa homotopii

Definicja 8.4 Niech $D \subseteq \mathbb{C}$ obszar, $b \in D$ ustalony punkt. Przez *pętlę w D z ustalonym punktem b* rozumiemy ciągłą krzywą $\gamma\colon [0,1] \to D$ spełniającą warunek $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich pętli przez $L(D,b)$.

Definicja 8.5 Mówimy, że pętle $\gamma_0, \gamma_1 \in L(D,b)$ są *homotopijnie równoważne*, co oznaczamy $\gamma_0 \simeq \gamma_1$, jeśli pętla γ_0 może być w sposób ciągły zdeformowana do γ_1 zachowując ustalony punkt b. (To znaczy, że istnieje *homotopia* łącząca γ_0 z γ_1, czyli istnieje ciągła funkcja $H\colon [0,1] \times [0,1] \to D$ taka, że $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$, $H(0,s) = H(1,s) = b$.)

Ponieważ homotopijna równoważność $\simeq$ jest relacją równoważności, to możemy zdefiniować przestrzeń ilorazową $L(D,b)/\simeq$ złożoną z klas homotopii $[\gamma]$ dla $\gamma \in L(D,b)$.

Na zbiorze $L(D,b)$ wprowadźmy operację mnożenia pętli. Niech $\gamma_0, \gamma_1 \in L(D,b)$. Wówczas

$$\gamma_1 \cdot \gamma_0(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{dla} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t-1) & \text{dla} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Oczywiście $\gamma_1 \cdot \gamma_0\colon [0,1] \to D$ też jest pętlą w D. Tak zdefiniowane mnożenie pętli możemy przenieść na klasy homotopii biorąc

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_0] = [\gamma_1 \cdot \gamma_0]. \tag{8.1}$$

Zauważmy, że jeśli $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ i $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ to $\gamma_1 \cdot \gamma_0 \simeq \gamma_1' \cdot \gamma_0$. A to oznacza, że mnożenie klas homotopi określone przez (8.1) jest poprawnie zdefiniowane (nie zależy od wyboru reprezentanta w danej klasie homotopii).

Pokażemy, że zbiór klas homotopii $L(D, b)/ \simeq$ wraz ze zdefiniowanym przez (8.1) mnożeniem tworzy grupę. Elementem neutralnym jest $[e]$, gdzie $e(t) = b$ jest pętlą równą punktowi b. Elementem odwrotnym do $[\gamma]$ jest $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$, gdzie $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Rzeczywiście, wówczas mamy $\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq e$ i $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq e$, a stąd $[\gamma]^{-1} \cdot [\gamma] = [e]$ i $[\gamma] \cdot [\gamma]^{-1} = [e]$.

Tak określoną grupę będziemy nazywać *grupą podstawową homotopii* i oznaczać przez $\Pi_1(D, b)$.

Przykład 8.6 Niech $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ i $b = \frac{1}{2}$. Oznaczmy przez γ_0 pętlę o końcach w punkcie $\frac{1}{2}$ obiegającą 0 w kierunu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wówczas $\Pi_1(D, b)$ jest wolną grupą generowaną przez $[\gamma_0]$. Innymi słowy $[\gamma] \in \Pi_1(D, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $[\gamma] = [\gamma_0]^m$. Oznacza to, że grupa $\Pi_1(D, b)$ jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z operacją dodawania.

Przykład 8.7 Niech $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, $b = \frac{1}{2}$. Oznaczmy — tak jak poprzednio — przez γ_0 pętlę o końcach w punkcie $\frac{1}{2}$ obiegającą 0 w kierunu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Oznaczmy dalej przez γ_1 pętlę o tych samych końcach i obiegającą 1 w kierunu przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wówczas $\Pi_1(D, b)$ jest wolną grupą generowaną przez $[\gamma_0]$ i $[\gamma_1]$. Innymi słowy $[\gamma] \in \Pi_1(D, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $n \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ spełniające $[\gamma] = [\gamma_{\alpha_1}]^{m_1} \cdot \ldots \cdot [\gamma_{\alpha_n}]^{m_n}$.

8.3 Grupa monodromii

Rozważmy równanie

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad a_j(t) \in \mathcal{O}(D). \tag{8.2}$$

Jeśli D nie jest jednospójny, to rozwiązania mogą być wielowartościowe. Żeby je opisać zdefiniujemy dla danego równania grupę monodromii.

Niech $U \subseteq D$ będzie jednospójnym otoczeniem b i niech $F = (f_1, \ldots, f_m)$ — fundamentalny układ rozwiązań (8.2) określonych na U. Dla dowolnego $\alpha = [\gamma] \in \Pi_1(D, b)$ rozważmy układ fundamentalny $\gamma_* F$ będący przedłużeniem analitycznym F wzdłuż drogi γ. Z jednoznaczności rozwiązań na zbiorach jednospójnych $\gamma_* F$ zależy jedynie od $[\gamma] = \alpha$, co będziemy oznaczać przez $\alpha_* F$. Zauważmy, że $\alpha_* F$ jest również układem fundamentalnym rozwiązań w U. Zatem istnieje macierz $M \in GL(m, \mathbb{C})$, $M = M(\alpha; F)$ taka, że

$$F = \alpha_* F M.$$

Stwierdzenie 8.8 *Odwzorowanie $\rho_F \colon \Pi_1(D, b) \to GL(m, \mathbb{C})$ dane wzorem $\alpha \mapsto M(\alpha; F)$ zachowuje strukturę grupy.*

Dowód. Ponieważ $e_* F = F$ to $F = FM(e, F)$. Z drugiej strony $F = F \cdot I$, gdzie $I \in GL(m, \mathbb{C})$ jest macierzą identycznościową. Oznacza to, że $M(e, F) = I$.

Zauważmy, że $(\alpha \cdot \beta)_* F = \alpha_*(\beta_* F)$. Korzystając z tego faktu i z definicji macierzy M mamy

$$\begin{aligned} F &= (\alpha \cdot \beta)_* F M(\alpha \cdot \beta, F) = \alpha_*(\beta_* F) M(\alpha \cdot \beta, F), \qquad \beta_* F = \alpha_*(\beta_* F) M(\alpha, F), \\ F &= \beta_* F M(\beta, F) = \alpha_*(\beta_* F) M(\alpha, F) M(\beta, F). \end{aligned}$$

A to oznacza, że $M(\alpha \cdot \beta, F) = M(\alpha, F) M(\beta, F)$. □

Definicja 8.9 Odwzorowanie ρ_F zachowujące strukturę grupy nazywamy *reprezentacją grupy* $\Pi_1(D, b)$, a jego obraz $\rho_F\Big(\Pi_1(D, b)\Big)$ będziemy nazywać *grupą monodromii względem F*.

Aby uniezależnić się od wyboru układu fundamentalnego rozwiązań F, zauważmy, że jeśli G jest innym fundamentalnym układem rozwiązań w otoczeniu U, to istnieje stała macierz $C \in GL(m, \mathbb{C})$, taka że $G = FC$. Mamy wówczas

$$\alpha_* F M(\alpha, F) C = FC = G = \alpha * G M(\alpha, G) = \alpha_*(FC) M(\alpha, G) = (\alpha_* F) C M(\alpha, G),$$

a stąd

$$M(\alpha, G) = C^{-1} M(\alpha, F) C \quad \text{oraz} \quad \rho_G = C^{-1} \rho_F C.$$

Oznacza to, że grupy monodromii względem F i względem G są podobne. Klasy podobieństwa będziemy nazywać *monodromią równania (8.1)*. Oczywiście monodromia zależy tylko od równania (i obszaru).

8.4 Problem Riemanna–Hilberta

Oryginalny problem Riemanna z 1857 roku dotyczył jego P-funkcji i polegał na znalezieniu równania

$$z \mapsto P \left\{ \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\}$$

spełniającego następujące warunki:
a) jest analityczne na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$;
b) każde 3 rozwiązania są liniowo zależne;
c) w każdym z osobliwych punktów a, b, c istnieją dwa niezależne rozwiązania $(z - z_0)^{\rho_1} f_1(z; z_0)$ i $(z - z_0)^{\rho_2} f_2(z; z_0)$, gdzie f_1 i f_2 są analityczne w $z = z_0$ i różne od zera. Przy czym: dla $z_0 = a$ mamy $\rho_1 = \alpha$, $\rho_2 = \alpha'$; dla $z_0 = b$ mamy $\rho_1 = \beta$, $\rho_2 = \beta'$; dla $z_0 = c$ mamy $\rho_1 = \gamma$, $\rho_2 = \gamma'$.

Wykazaliśmy w Stwierdzeniu 3.5 (strona 9), że te warunki wyznaczają P-funkcję jednoznacznie, pod warunkiem, że $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$. Rozwiązaniem jest liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu, redukujące sie do równania hipergeometrycznego. Sześć rozwiązań będzie tego typu, jeśli żadna z różnic $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ nie jest równa zeru.

Podczas II Kongresu Matematycznego w Paryżu w 1900 roku David Hilbert postawił podczas swojego słynnego wykładu między innymi taki problem (zwany XXI problemem Hilberta):

> Dla danego skończonego zbioru $S = \{a_1, \ldots, a_r, \infty\}$ i monodromii $\rho\colon \Pi_1(\mathbb{C}\backslash S, x_0) \to GL(2, \mathbb{C})$ znaleźć równanie Fuchsa rzędu 2 mające regularne punkty osobliwe w S i monodromię ρ.

Tak postawiony problem ma rozwiązanie dla $r \leqslant 2$. Dla $r \geqslant 3$ w ogólności możemy otrzymać równanie będące rozwiązaniem jedynie wtedy, gdy dopuścimy możliwość, aby oprócz punktów regularnych osobliwych z S pojawiły się tzw. *pozorne osobliwości* (ang. *apparent singularities*), czyli bieguny współczynników o trywialnej grupie monodromii.

Problem ten, zwany również problemem Hilberta–Riemana można uogólnić zastępując jedno równanie przez układ m równań pierwszego rzędu jak następuje:

> Dla danego skończonego zbioru $S = \{a_1, \ldots, a_r, \infty\}$ i monodromii $\rho\colon \Pi_1(\mathbb{C} \setminus S, x_0) \to GL(m, \mathbb{C})$ znaleźć układ m równań Fuchsa $\dot{x} = A(t)x$ mający regularne punkty osobliwe w S (tzn., że $A(t)$ jest macierzą meromorficzną o osobliwościach w punktach $t = a_i$ będących biegunami pierwszego rzędu) i monodromię ρ.

Przez dziesiątki lat wydawało się, że XXI problem Hilberta został rozwiązany przez J. Plemelj w 1908 roku. Dopiero po wielu latach odkryto lukę w jego dowodzie. W rzeczywistości Plemelj wykazał istnienie układu równań o danych osobliwościach i monodromii w szerszej klasie układów równań niż układy Fuchsa.

W przypadku tak postawione problemu w 1979 roku W. Dekkers wykazał, że odpowiedź jest pozytywna dla $m = 2$ (niezależnie od r). Natomiast w 1989 roku A. Bolibruch wykazał konstruując odpowiedni kontrprzykład, że w ogólnym przypadku odpowiedź jest negatywna.

Ćwiczenia

1. Znajdź grupę monodromii równania:
   a) $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$,
   b) $t^2\ddot{x} + \frac{1}{6}t\dot{x} + \frac{1}{6}x = 0$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.