9 Rozwinięcia asymptotyczne

Rozdział ten oparty jest na książce W. Wasowa [8].

9.1 Przykład

Rozważmy równanie

$$t^2\ddot{x} + (3t-1)\dot{x} + x = 0. \tag{9.1}$$

Zauważmy, że $t = 0$ jest punktem osobliwym nieregularnym. Poszukajmy — podobnie jak w przypadku punktów osobliwych regularnych — rozwiązań w postaci szeregu Frobeniusa $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+l}$. Wstawiając do (9.1) dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+l)^2 a_{n-1}t^{n+l-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+l)a_n t^{n+l-1} = 0.$$

Skąd dla $n = 0$ dostajemy równanie indeksowe $l = 0$. Zauważmy, że w przeciwieństwie do punktów osobliwych regularnych, nasze równanie indeksowe nie jest kwadratowe ale liniowe. Dla $n \geqslant 1$ dostajemy zależność rekurencyjną

$$(n+l)^2 a_{n-1} - (n+l)a_n = 0, \quad \text{a stąd} \;\; a_n = na_{n-1}, \quad a_n = n!a_0.$$

Dla $a_0 = 1$ dostajemy rozwiązanie $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n!t^n$. Zauważmy, że otrzymany szereg jest rozbieżny dla dowolnego $t \neq 0$. Zatem dla takich t musimy na niego patrzeć jak na szereg formalny.

Przypomnijmy, że $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-s}s^n\,ds$. Zatem

$$\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\int_0^\infty e^{-s}s^n\,ds\Big)t^n.$$

Zamieńmy kolejność sumowania i całkowania. Ponieważ nie zawsze taka zamiana jest możliwa, to otrzymaną w ten sposób funkcję oznaczmy przez

$$x(t) = \int_0^\infty e^{-s}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}s^n t^n\Big)\,ds = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds. \tag{9.2}$$

Wykażemy, że tak zdefiniowane $x(t)$ jest rozwiązaniem (9.1) dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$. W tym celu zauważmy, że dla takich t i dla $s \in (0,\infty)$ zachodzi

$$\Big|\frac{1}{1-st}\Big| \leqslant 1, \quad \text{a stąd} \quad \Big|\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds\Big| \leqslant \int_0^\infty e^{-s}\,ds = 1,$$

więc prawa strona (9.2) ma sens. Podobnie dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ ma sens

$$\dot{x}(t) = \int_0^\infty \frac{se^{-s}}{(1-st)^2}\,ds, \quad \text{bo} \quad \Big|\int_0^\infty \frac{se^{-s}}{(1-st)^2}\,ds\Big| \leqslant \int_0^\infty se^{-s}\,ds = 1.$$

Różniczkując obie strony równości $tx = \int_0^\infty \frac{te^{-s}}{1-st}\,ds$ dostajemy

$$t\dot{x} + x = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{(1-st)^2}\,ds, \quad \text{a stąd} \quad t^2\dot{x} + tx = \int_0^\infty \frac{te^{-s}}{(1-st)^2}\,ds = \frac{e^{-s}}{1-st}\bigg|_{s=0}^{s=\infty} + \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds = -1 + x.$$

Dostaliśmy zatem, że $x(t)$ zdefiniowane przez (9.2) spełnia równanie $t^2\dot{x} + (t-1)x = -1$. Różniczkując obie strony dostajemy, że takie $x(t)$ spełnia również nasze równanie (9.1).

Zatem wychodząc z rozbieżnego szeregu $\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n!t^n$ dostaliśmy dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ prawdziwe rozwiązanie $x(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds$. Pokażemy, że taki szereg $\widehat{x}(t)$ może służyć do przybliżania $x(t)$ w otoczeniu zera.

Niech więc $s_n(t) = \sum_{k=0}^n k!t^k$. Wówczas dla $\operatorname{Re} t \leqslant 0$ mamy

$$\begin{aligned} x(t) - s_n(t) &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \sum_{k=0}^n k!t^k = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \sum_{k=0}^n \Big(\int_0^\infty e^{-s}s^k\,ds\Big)t^k \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \int_0^\infty e^{-s}\sum_{k=0}^n (st)^k\,ds = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1-st}\,ds - \int_0^\infty e^{-s}\frac{1-(st)^{n+1}}{1-st}\,ds = \int_0^\infty e^{-s}\frac{(st)^{n+1}}{1-st}\,ds. \end{aligned}$$

A stąd

$$|x(t) - s_n(t)| \leqslant |t|^{n+1}\int_0^\infty s^{n+1}e^{-s}\,ds = (n+1)!|t|^{n+1}.$$

Oznacza to, że błąd jest co do modułu nie większy niż pierwszy pominięty składnik $(n+1)!t^{n+1}$. Przypomnijmy, że interesuje nas zachowanie rozwiązania w otoczeniu $t = 0$. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$ mamy $\lim_{t\to 0^-} \frac{x(t)-s_n(t)}{t^n} = 0$ (tzn. że szereg $\widehat{x}$ jest asymptotyczny do $x(t)$ przy $t \to 0^-$), ale $\lim_{n\to\infty} |x(t) - s_n(t)| \neq 0$ (tzn. że szereg $\widehat{x}$ nie jest zbieżny do $x(t)$).

9.2 Wprowadzenie rozwinięcia asymptotycznego

Definicja 9.1 (Poincaré, 1886) Niech funkcja $f(t)$ będzie określona na obszarze $S \subset \mathbb{C}$, $0 \in \partial S$. Mówimy, że szereg potęgowy $\sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ jest *rozwinięciem asymptotycznym $f(t)$ na S przy $t \to 0$* jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t\to 0,\, t\in S} \frac{f(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^k}{t^n} = 0.$$

Będziemy to oznaczać przez $f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$.

W dalszej części zajmiemy się badaniem własności rozwinięć asymptotycznych.

Stwierdzenie 9.2 (Jednoznaczność rozwinięć asymptotycznych) *Dla danej funkcji $f(t)$ istnieje co najwyżej jedno rozwinięcie asymptotyczne $\sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ przy $t \to 0$ w zadanym zbiorze S.*

Dowód. Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$, to w szczególności musi być

$$\lim_{t\to 0,\, t\in S} f(t) = \lim_{t\to 0,\, t\in S} a_0 = a_0 \quad \text{i} \quad \lim_{t\to 0,\, t\in S} \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k}{t^n} = \lim_{t\to 0,\, t\in S} \frac{f(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^k + a_n t^n}{t^n} = a_n \ (n > 0).$$

Zauważmy, że powyższe równania w sposób jednoznaczny wyznaczają rozwinięcie asymptotyczne $f(t)$. □

Dana funkcja definiuje w sposób jednoznaczny rozwinięcie asymptotyczne, ale nie na odwrót! Mając rozwinięcie asymptotyczne nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jednoznacznie funkcji. W szczególności bowiem mamy dla $f(t) \equiv 0$ i $g(t) = e^{-\frac{1}{t}}$, że $f(t) \sim 0$ i $g(t) \sim 0$ dla $t \to 0$, $\operatorname{Re} t > 0$.

9.3 Własności algebraiczne rozwinięć asymptotycznych

Bezpośrednio z definicji rozwinięcia asymptotycznego dostajemy

Stwierdzenie 9.3 (Liniowość rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ i $g(t) \sim \sum_{k=0}^\infty b_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$ to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ zachodzi $\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=0}^\infty (\alpha a_k + \beta b_k)t^k$, $t \in S$, $t \to 0$.*

Mamy również

Stwierdzenie 9.4 (Mnożenie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ i $g(t) \sim \sum_{k=0}^\infty b_k t^k$, $t \in S$, $t \to 0$ to $f(t)g(t) \sim \sum_{k=0}^\infty c_k t^k$, gdzie $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$.*

Dowód. Z założenia

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \quad \text{i} \quad g(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + E_2(t,n)t^n,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_1(t,n) = 0$ i $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_2(t,n) = 0$. Wówczas

$$f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k + E_3(t,n)t^n \quad \text{dla pewnego } E_3(t,n) \text{ spełniającego} \quad \lim_{t\to 0,\, t\in S} E_3(t,n) = 0.$$

□

Podobnie zachodzi

Stwierdzenie 9.5 (Złożenie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $t \in S$ i $g(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$ dla $u \in T$ oraz jeśli $f(t) \in T$ dla $t \in S$ to $g(f(t)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ dla $t \in S$, gdzie współczynniki c_k są takie, aby $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m \Big)^l$.*

Dowód. Ponieważ $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} f(t) = a_0$ a z drugiej strony dla $t \in S$ zachodzi $f(t) = u$ i $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} f(t) = \lim\limits_{u\to 0,\, u\in T} u = 0$ to musimy założyć, że $a_0 = 0$.

Z założenia

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \quad \text{i} \quad g(u) = \sum_{l=0}^{n} b_l u^l + E_2(u,n)u^n,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_1(t,n) = 0$ i $\lim\limits_{u\to 0,\, u\in T} E_2(u,n) = 0$. Wówczas

$$g(f(t)) = \sum_{l=0}^{n} b_l \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \Big)^l + E_2(u,n) \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k t^k + E_1(t,n)t^n \Big)^n = \sum_{m=0}^{n} c_m t^m + E_3(t,n)t^n$$

dla pewnego $E_3(t,n)$ spełniającego $\lim\limits_{t\to 0,\, t\in S} E_3(t,n) = 0$. □

9.4 Własności analityczne rozwinięć asymptotycznych

Dalsze własności rozwinięć asymptotycznych będą dotyczyły funkcji analitycznych.

Stwierdzenie 9.6 *Niech $S = \{t \in \mathbb{C}\colon 0 < |t| < t_0\}$ i $f \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$. Jeśli $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \to 0$, $t \in S$, to szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$jest zbieżny do f dla $|t| < t_0$.*

Dowód. Mamy $\lim_{t\to 0} f(t) = a_0$, więc można przedłużyć f na $|t| < t_0$ przyjmując $f(0) = a_0$. Wówczas funkcja f staje się analityczna dla $|t| < t_0$ i rozwija się w szereg potęgowy na tym zbiorze, który jest jednocześnie rozwinięciem asymptotycznym f. Z jednoznaczności rozwinięć asymptotycznych (Stwierdzenie 9.2) musi być $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $|t| < t_0$. □

W dalszym ciągu będziemy się głównie zajmować obszarami $S \subset \mathbb{C}$ zwanymi *sektorami*, tzn.

$$S = \{z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}\colon r \in (0,R),\ \phi \in (\phi_0, \phi_1)\}.$$

Stwierdzenie 9.7 (Całkowanie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli $f(t) \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$, S — sektor i $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, $t \to 0$, $t \in S$ to*

$$\int_0^t f(s)\, ds \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} \quad \textit{dla} \quad t \in S. \tag{9.3}$$

Dowód. Ponieważ S jest sektorem, to $(0, t] \subset S$, a stąd całka z lewej strony (9.3) ma sens. Z założenia

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + E(t,n)t^n, \quad \text{gdzie} \quad \lim_{t\to 0,\, t\in S} E(t,n) = 0.$$

Zatem

$$\int_0^t f(s)\,ds = \sum_{k=0}^{n} \int_0^t a_k s^k\,ds + \int_0^t E(s,n)s^n\,ds = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} + \int_0^t E(s,n)s^n\,ds,$$

gdzie po zamianie zmiennych $s = \sigma t$

$$\int_0^t E(s,n)s^n\,ds = t^{n+1} \int_0^1 E(\sigma t, n)\sigma^n\,d\sigma \longrightarrow 0 \quad \text{przy} \quad t \to 0,\ t \in S.$$

□

Nie da się otrzymać podobnego wyniku, gdybyśmy zamiast całkowania wzieli różniczkowanie rozwinięć asymptotycznych. Prostym kontrprzykładem jest funkcja

$$f(t) = e^{-\frac{1}{t}} \sin(e^{\frac{1}{t}}), \quad \text{dla której zachodzi} \quad f(t) \sim 0 \text{ przy } t \to 0,\ t > 0.$$

Z drugiej strony zaś

$$f'(t) = t^{-2}\Big(e^{-\frac{1}{t}} \sin(e^{\frac{1}{t}}) - \cos(e^{\frac{1}{t}})\Big) \quad \text{i nie istnieje granica} \quad \lim_{t\to 0,\ t>0} f'(t).$$

Natomiast zachodzi

Stwierdzenie 9.8 (Różniczkowanie rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli* $f(t) \in \mathcal{O}(S)$ *dla* $S = \{t \in \mathbb{C} \colon 0 < |t| < t_0,\ \theta_1 < \arg t < \theta_2\}$ *spełnia* $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ *dla* $t \in S$, $t \to 0$, *to*

$$f'(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} \quad \textit{dla} \quad t \to 0,\ t \in S^* = \{t \in \mathbb{C} \colon 0 < |t| < t_0^* < t_0,\ \theta_1 < \theta_1^* < \arg t < \theta_2^* < \theta_2\} \text{ — \textit{podsektora} } S.$$

Dowód. Mamy

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + E(t,n)t^n, \quad f'(t) = \sum_{k=0}^{n} k a_k t^{k-1} + n t^{n-1} E(t,n) + t^n E'(t,n), \quad \text{gdzie} \lim_{t\to 0,\, t\in S} E(t,n) = 0.$$

Niech α takie, że dla każdego $t \in S^*$ kula $B(t, \alpha|t|)$ o środku w t i promieniu $\alpha|t|$ jest zawarta w S i niech $M(t,n) = \max\limits_{t\in B(t,\alpha|t|)} |E(t,n)|$. Wówczas z nierówności Cauchy'ego $|E'(t,n)| \leqslant \frac{M(t,n)}{|t|\alpha}$ i zachodzi

$$\Big|f'(t) - \sum_{k=0}^{n} k a_k t^{k-1}\Big| \leqslant |t|^{n-1}\Big(nE(t,n) + \frac{M(t,n)}{\alpha}\Big) \longrightarrow 0 \quad \text{przy} \quad t \to 0,\ t \in S^*.$$

□

Stwierdzenie 9.9 (Formuła Taylora dla rozwinięć asymptotycznych) *Jeśli* $f(t) \in \mathcal{O}(S) \cap C^0(\overline{S})$ *dla sektora* $S \subset \mathbb{C}$ *i istnieją granice* $f_r = \lim\limits_{t\to 0,\ t\in S} f^{(r)}(t)$ *dla* $r \in \mathbb{N}_0$, *to*

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} t^k \quad \textit{dla} \quad t \in S,\ t \to 0.$$

Dowód. Niech $S \subset \mathbb{C}$ sektor, $f(t) \in S$. Korzystając z formuły Taylora dla dowolnego $a \in S$ mamy

$$f(t) = f(a) + \frac{t-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(t-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{1}{m!} \int_a^t (t-s)^m f^{(m+1)}(s)\,ds.$$

Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{t\to 0,\ t\in S} f^{(r)}(t)$, to zamiast a można wziąć 0. Wobec tego stwierdzenie wynika z oszacowania reszty

$$\Big|\frac{1}{m!} \int_a^t (t-s)^m f^{(m+1)}(s)\,ds\Big| \leqslant \sup_{t\in S} |f^{(m+1)}(t)| \frac{1}{m!} \int_0^{|t|} |t-s|^m\,ds = \sup_{t\in S} |f^{(m+1)}(t)| \frac{|t|^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-s)^m\,ds.$$

□

9.5 Twierdzenie Ritta

Pokazywaliśmy wcześniej, że dla danego rozwinięcia asymptotycznego nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć funkcji o tym rozwinięciu. Okazuje się natomiast, że można udowodnić istnienie funkcji o zadanym rozwinięciu. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 9.10 (Ritt, 1916) *Dla dowolnego szeregu formalnego $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ i dowolnego sektora S istnieje funkcja $f(t)$ analityczna w tym sektorze dla $|t| < t_0$ i taka, że $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $t \in S$, $t \to 0$.*

Dowód. Ponieważ $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ w S wtedy i tylko wtedy gdy $g(t) = f(te^{-i\theta}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-i\theta} k t^k$ w $Se^{-i\theta}$, więc bez straty ogólności możemy założyć, że wektor S jest symetryczny względem osi rzeczywistej i ograniczony półprostymi $\arg t = \pm\gamma$. Możemy więc przyjąć $S = \{t = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \colon r \in (0,1),\ \phi \in (-\gamma, \gamma)\}$.

Idea dowodu polega na zastąpieniu naszego szeregu przez nowy zmodyfikowany szereg typu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^k$, gdzie $\alpha_k(t)$ wybieramy w ten sposób, aby uzbieżnić szereg i jednocześnie nie zmienić asymptotyki (tzn. $\alpha_k(t)$ małe dla $t \neq 0$ i szybko zbieżne do 1 dla $t \to 0$. Np. $\alpha_k(t) = 1 - e^{-\frac{b_k}{t^\beta}}$ dla $b_k > 0$ i $\beta \in (0,1)$. Ponieważ $|1 - e^z| < |z|$ dla $\operatorname{Re} z < 0$, to $|a_k \alpha_k(t) t^k| \leqslant |a_k||b_k||t|^{k-\beta}$ dla $t \in S$. Jeśli teraz przyjmiemy

$$b_k = \begin{cases} |a_k|^{-1} & \text{dla} \quad a_k \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad a_k = 0 \end{cases},$$

to dla $t \in S$ zachodzi oszacowanie $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |t|^{k-\beta} < \infty$, co dowodzi zbieżności.

Zatem wystarczy pokazać, że dla $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^k$ zachodzi $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ dla $t \in S$. Mamy bowiem

$$t^{-m}\Big(f(t) - \sum_{k=0}^{m} a_k t^k\Big) = -\sum_{k=0}^{m} a_k e^{-\frac{b_k}{t^\beta}} t^{-(m-k)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^{k-m} \longrightarrow 0 \quad \text{dla} \quad t \to 0,\ t \in S,$$

gdyż dla $|t| \leqslant t_0$

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \alpha_k(t) t^{k-m}\Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |t|^{k-m-\beta} \leqslant \frac{|t|^{1-\beta}}{1 - |t|}.$$

□

9.6 Rozwinięcia asymptotyczne w nieskończoności

Dotychczas zajmowaliśmy się badaniem rozwinięć asymptotycznych w otoczeniu zera. W podobny sposób można badać rozwinięcia w otoczeniu dowolnego $a \in \mathbb{C}$. Możemy również mówić o rozwinięciach asymptotycznych wokół nieskończoności. Ten ostatni przypadek otrzymujemy z rozwinięć wokół zera zastępując t przez t^{-1}. W szczególności mamy

Definicja 9.11 Niech funkcja $f(t)$ będzie określona na obszarze nieograniczonym $\widetilde{S} \subset \mathbb{C}$. Mówimy, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$ jest *rozwinięciem asymptotycznym $f(t)$ na $\widetilde{S}$ przy $t \to \infty$* jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \to \infty,\, t \in \widetilde{S}} t^n \Big(f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{-k}\Big) = 0.$$

Będziemy to oznaczać przez $f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}$, $t \in \widetilde{S}$, $t \to \infty$.

Ćwiczenia

1. Znaleźć rozwinięcie asymptotyczne w ∞ funkcji
   a) $\mathrm{Ei}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^s}{s}\, ds$ dla $t < 0$,
   b) $f(t) = \int_t^{\infty} e^{t^2 - s^2}\, ds$,
   c) $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{1+s^2}\, ds$.
2. Znaleźć rozwiązanie formalne $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ równania i pokazać, że powstały szereg jest rozbieżny dla $t \neq 0$
   a) $t^3 \ddot{x} + (t^2 + t)\dot{x} - x = 0$.

Literatura

[1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.

[2] W Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.

[3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.

[4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.

[5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gaus to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.

[6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.

[7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.

[8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część I, PWN, Warszawa 1967.

[10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej*. Część II, PWN, Warszawa 1968.

[11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.