

12 Teoria perturbacji dla równań różniczkowych

Rozdział ten jest oparty na następujących monografiach poświęconych teorii perturbacji: M. Holmes [4] i R. O'Malley [6]. Wszystkich chcących poszerzyć swoją wiedzę poświęconą tej teorii odsyłam do tych pozycji.

W wielu zagadnieniach fizyki i chemii mamy do czynienia z równaniami w których występuje bliski zeru parametr (będziemy go oznaczać ϵ), który powoduje zaburzenia. Naszym celem będzie zbadanie zależności rozwiązań od tego parametru. Zazwyczaj takiego równania z małym parametrem ϵ nie da się rozwiązać dokładnie, ale możemy to rozwiązanie aproksymować. Dostajemy wówczas rozwinięcie asymptotyczne rozwiązania względem parametru ϵ .

12.1 Perturbacje regularne

Przypuśćmy, że dla małych ϵ i dla $t \in D \subseteq \mathbb{C}$ mamy zdefiniowane równanie różniczkowe $P_\epsilon(x) = 0$, którego rozwiązaniem jest $x(t) = x_\epsilon(t)$. Jeśli przy $\epsilon \rightarrow 0$ rozwiązanie $x_\epsilon(t) \rightrightarrows x_0(t)$ na D , gdzie $x_0(t)$ jest rozwiązaniem $P_0(x_0) = 0$, to wówczas mamy do czynienia z perturbacjami regularnymi.

Zacznijmy od przykładu. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$(12.1) \quad \ddot{x} + \epsilon \dot{x} + 1 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Szukamy rozwiązania w postaci szeregu względem ϵ : $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \epsilon^n$.

Wstawiając ten szereg do równania (12.1) dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ddot{x}_n(t) \epsilon^n + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_{n-1}(t) \epsilon^n + 1 = 0.$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach ϵ dostajemy równania na $x_n(t)$. W szczególności mamy:

$$\text{dla } n = 0 \quad \ddot{x}_0 + 1 = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = 1, \quad \text{czego rozwiązaniem jest } x_0(t) = -\frac{t^2}{2} + t;$$

$$\text{dla } n > 0 \quad \ddot{x}_n = -\dot{x}_{n-1}, \quad x_n(0) = 0, \quad \dot{x}_n(0) = 0, \quad \text{czego rozwiązaniem jest } x_n(t) = (-1)^n \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} \right).$$

Zatem

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + t + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} \right).$$

Ponieważ ϵ jest bliskie zeru, to zazwyczaj wystarczy nam wiedza o pierwszych wyrazach w rozwinięciu, czyli np. że

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + t + \epsilon \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right) + O(\epsilon^2).$$

W kolejnym przykładzie rozważmy równanie nieliniowe

$$(12.2) \quad \dot{x} = \epsilon e^{x^2}, \quad x(0) = 1.$$

Będziemy szukać rozwiązania w postaci $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2)$. Wstawiając do równania (12.2) dostajemy $\dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + O(\epsilon^2) = \epsilon e^{(x_0 + \epsilon x_1 + O(\epsilon^2))^2}$. Rozwijając w szereg $e^{s^2} = 1 + \frac{s^2}{1!} + \frac{s^4}{2!} + \dots$ dostajemy ostatecznie równanie

$$\dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1 + O(\epsilon^2) = \epsilon e^{x_0^2} + O(\epsilon^2), \quad x_0 + \epsilon x_1(0) = 1,$$

którego rozwiązaniem są $x_0(t) = 1$ ($\dot{x}_0 = 0, x_0(0) = 1$) i $x_1(t) = et$ ($\dot{x}_1 = e^{x_0^2} = e, x_1(0) = 0$).

Zatem $x(t) = 1 + \epsilon et + O(\epsilon^2)$.

Ogólnie, niech L, M będą operatorami różniczkowymi i dodatkowo niech L będzie liniowe. Rozważmy wówczas równanie

$$(12.3) \quad L(x) + \epsilon M(x) = 0$$

z zadanymi warunkami początkowymi lub brzegowymi. Będziemy szukać rozwiązania postaci $x(t; \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2)$. Wstawiając do równania (11.3) dostajemy $L(x_0) + \epsilon L(x_1) + \epsilon M(x) = 0$, a stąd $L(x_0) = 0$ (wyliczamy $x_0(t)$) i $L(x_1) = -M(x_0)$ (znajdujemy $x_1(t)$).

12.2 Perturbacje osobliwe — metoda dopasowania rozwinięcia asymptotycznego

Pojawiają się one wtedy, gdy granica perturbacji regularnych $x_\epsilon(t) \rightrightarrows x_0(t)$ przy $\epsilon \rightarrow 0$ nie istnieje.

Tak jest np. wtedy, gdy w równaniu ϵ jest współczynnikiem przy x z najwyższą pochodną. Wówczas przejście graniczne $\epsilon \rightarrow 0$ powoduje, że zmienia się liczba rozwiązań. Dlatego też aby rozwiązać ten problem musimy użyć jednej z innych metod niż w przypadku perturbacji regularnych.

Pierwszą z nich jest *metoda dopasowania rozwinięcia asymptotycznego*. Aby ją zrozumieć zacznijmy od przykładu.

Rozważmy równanie $\epsilon \dot{x} + x = 1$ z warunkiem początkowym $x(0) = a$, gdzie ϵ jest małym dodatnim parametrem. Rozwiązanie bezpośrednie ma postać $x(t, \epsilon) = 1 + (a - 1)e^{-t/\epsilon}$. Przechodząc z $\epsilon \rightarrow 0$ dostajemy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(t, \epsilon) = \begin{cases} a = x(0) & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}.$$

Zauważmy, że o ile $a \neq 1$, to w granicy dostajemy funkcję, która przestaje być ciągłą. Oznacza to, że nie da się do tego równania zastosować podstawienia, tak jak w przypadku perturbacji regularnych, które by było dobre dla wszystkich t . Dlatego też będziemy osobno poszukiwać rozwinięć asymptotycznych dla t dalekich od zera (*rozwiązania zewnętrzne*) i dla t w pobliżu zera (*rozwiązania wewnętrzne*). Następnie „skleimy” wszystko w jedno rozwinięcie.

Rozwiązania zewnętrznego będziemy szukać tak jak w przypadku perturbacji regularnych, czyli wstawiając $\bar{x}(t, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n(t) \epsilon^n$ do wyjściowego równania. Dostajemy wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dot{\bar{x}}_{n-1} \epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n \epsilon^n = 1, \quad \text{a stąd } \bar{x}_0(t) = 1 \text{ i } \bar{x}_n(t) = -\dot{\bar{x}}_{n-1}, \text{ czyli } \bar{x}_n(t) = 0 \text{ dla } n \geq 1.$$

A zatem rozwiązanie zewnętrzne ma postać $\bar{x}(t, \epsilon) = 1$.

Zajmiemy się teraz znalezieniem rozwiązania wewnętrznego. W tym celu dokonajmy zamiany zmiennych niezależnych $\tau = t/\epsilon$. Szukamy rozwiązania wewnętrznego postaci

$$\tilde{x}(\tau, \epsilon) = \tilde{x}(t/\epsilon, \epsilon) = x(t, \epsilon) - \bar{x}(t, \epsilon) \quad \text{z warunkiem początkowym } \tilde{x}(0, \epsilon) = x(0, \epsilon) - \bar{x}(0, \epsilon) = a - 1.$$

Ponieważ $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{d\tau}$, to $\tilde{x}(\tau, \epsilon)$ musi spełniać równanie postaci $\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = 0$, $\tilde{x}(0) = a - 1$. Szukamy rozwiązania tego równania — tak jak w przypadku perturbacji regularnych — w postaci $\tilde{x}(\tau, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n(\tau) \epsilon^n$. Dostajemy wówczas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{\tilde{x}}_n \epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n \epsilon^n = 0, \quad \text{a stąd } \dot{\tilde{x}}_0 + \tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_0(0) = a - 1 \text{ i } \dot{\tilde{x}}_n + \tilde{x}_n = 0, \quad \tilde{x}_n(0) = 0 \text{ dla } n \geq 1,$$

a stąd otrzymujemy $\tilde{x}_0(\tau) = (a - 1)e^{-\tau}$ i $\tilde{x}_n(\tau) = 0$ ($n \geq 1$). Rozwiązaniem wewnętrznym jest zatem $\tilde{x}(\tau, \epsilon) = (a - 1)e^{-\tau}$.

Ostateczne rozwiązanie otrzymamy sumując rozwiązanie zewnętrzne i wewnętrzne

$$x(t, \epsilon) = \bar{x}(t, \epsilon) + \tilde{x}(t/\epsilon, \epsilon) = 1 + (a - 1)e^{-t/\epsilon},$$

co oczywiście zgadza się z wcześniej uzyskanym bezpośrednim rozwiązaniem tego równania.

Zastosujmy teraz metodę dopasowania rozwinięcia asymptotycznego do ogólnej postaci zagadnienia brzegowego dla równań liniowych drugiego rzędu postaci

$$(12.4) \quad \epsilon \ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t), \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 1, \quad a(t) > 0, \quad \text{z warunkami brzegowymi } x(0), x(1).$$

Zakładamy tu, że funkcje $a(t)$, $b(t)$ i $f(t)$ są gładkie. Rozwiązania będziemy szukać w postaci $x(t, \epsilon) = \bar{x}(t, \epsilon) + \tilde{x}(t/\epsilon, \epsilon)$, gdzie $\bar{x}(t, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n(t) \epsilon^n$ jest rozwiązaniem zewnętrznym, a $\tilde{x}(\tau, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n(\tau) \epsilon^n$ rozwiązaniem wewnętrznym.

Wstawiając rozwiązanie zewnętrzne do równania dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\bar{x}}_{n-1} \epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} a(t) \dot{\bar{x}}_n \epsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} b(t) \bar{x}_n \epsilon^n = f(t), \quad \bar{x}(1, \epsilon) = x(1).$$

Stąd $\bar{x}_0(t)$ spełnia równanie $a(t)\dot{\bar{x}}_0 + b(t)\bar{x}_0 = f(t)$, $\bar{x}_0(1) = x(1)$.

Podobnie $\bar{x}_n(t)$ dla $n \geq 1$ spełnia równanie $a(t)\dot{\bar{x}}_n + b(t)\bar{x}_n = -\ddot{\bar{x}}_{n-1}$, $\bar{x}_n(1) = 0$. Rozwiązując te równania jesteśmy w stanie sukcesywnie wyliczyć $\bar{x}_0(t), \bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t), \dots$.

Rozwiązanie zewnętrzne zachodzi dla $0 < t \leq 1$, czyli nie wiadomo, co będzie się działo w otoczeniu zera. Zauważmy, że przy znajdowaniu rozwiązania zewnętrznego nie wykorzystujemy warunku brzegowego w zerze. Ponieważ $\bar{x}(0, \epsilon)$ nie musi się równać $x(0)$, więc musimy dodać poprawkę $\bar{x} + \tilde{x}$.

Ponieważ $\bar{x}$ i $\tilde{x}$ są rozwiązaniami (12.4), więc dla $\tau = t/\epsilon$ mamy

$$\epsilon \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + a(t) \frac{d\bar{x}}{dt} + b(t)\bar{x} = f(t) = \epsilon \left(\frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tau^2} \right) + a(t) \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau} + \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{d\tilde{x}}{d\tau} \right) + b(t)(\bar{x} + \tilde{x}).$$

Stąd rozwiązanie wewnętrzne $\tilde{x}$ musi spełniać równanie

$$\ddot{\tilde{x}} + a(\epsilon\tau)\dot{\tilde{x}} + \epsilon b(\epsilon\tau)\tilde{x} = 0, \quad \tilde{x}(0, \epsilon) = x(0) - \bar{x}(0, \epsilon), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{x}(\tau, \epsilon) = 0.$$

Aby znaleźć to rozwiązanie weźmy $\tilde{x}(\tau, \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n(\tau) \epsilon^n$. Współczynniki tego rozwinięcia $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \dots$ można zatem znaleźć rozwiązując kolejno równania (z odpowiednimi warunkami brzegowymi): $\ddot{\tilde{x}}_0 + a(0)\dot{\tilde{x}}_0 = 0$ i $\ddot{\tilde{x}}_n + a(0)\dot{\tilde{x}}_n = \beta_{n-1}(\tau)$, gdzie $\beta_{n-1}(\tau)$ można sukcesywnie wyznaczać (dla $n \geq 1$).

Ostatecznym rozwiązaniem jest $x(t, \epsilon) = \bar{x}(t, \epsilon) + \tilde{x}(t/\epsilon, \epsilon)$.

12.3 Perturbacje osobliwe — metoda WKB

Nazwa metody pochodzi od jej odkrywców (Wentzel, Kramers, Brillouin), którzy ją stworzyli w 1926 roku na potrzeby mechaniki kwantowej. Można ją stosować jedynie w przypadku, gdy zależność $x(t)$ jest eksponencjalna. Rozwiązania w metodzie tej poszukujemy w postaci

$$(12.5) \quad x(t) \sim e^{\theta(t)/\epsilon} \left(x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots \right).$$

Różniczkując to rozwinięcie asymptotyczne dostajemy

$$(12.6) \quad \dot{x}(t) \sim e^{\theta(t)/\epsilon} \left(\epsilon^{-1} \dot{\theta}(t) x_0(t) + \dot{x}_0(t) + \dot{\theta}(t) x_1(t) + \epsilon \dot{x}_1(t) + \dots \right),$$

$$(12.7) \quad \ddot{x}(t) \sim e^{\theta(t)/\epsilon} \left(\epsilon^{-2} \theta(t)^2 x_0(t) + \epsilon^{-1} (\ddot{\theta}(t) x_0(t) + 2\dot{\theta}(t) \dot{x}_0(t) + \dot{\theta}(t)^2 x_1(t)) + \dots \right).$$

Będziemy stosować metodę WKB do równań typu $\epsilon^2 \ddot{x} - q(t)x = 0$. Wstawmy zatem do tego równania $x(t)$ w postaci (12.5). Dostaniemy wówczas

$$\dot{\theta}^2 x_0 + \epsilon(\ddot{\theta} x_0 + 2\dot{\theta} \dot{x}_0 + \dot{\theta}^2 x_1) + \dots - q(t)(x_0 + \epsilon x_1) = 0.$$

Porównując wyrażenia tego samego rzędu dostajemy dla $O(1)$ równanie eikonału $\dot{\theta}^2 = q(t)$, którego rozwiązaniem jest $\theta(t) = \pm \int^t \sqrt{q(s)} ds$. Podobnie dla $O(\epsilon)$ dostajemy równanie transportu $\ddot{\theta} x_0 + 2\dot{\theta} \dot{x}_0 + \dot{\theta}^2 x_1 = q(t)x_1$, czyli $\ddot{\theta} x_0 + 2\dot{\theta} \dot{x}_0 = 0$ z rozwiązaniem $x_0(t) = \frac{C}{\sqrt{\dot{\theta}}}$. Zatem dostajemy

$$x(t) \sim q(t)^{-1/4} \left(a_0 e^{-1/\epsilon \int^t \sqrt{q(s)} ds} + b_0 e^{1/\epsilon \int^t \sqrt{q(s)} ds} \right).$$

W szczególności np. dla $q(t) = -e^{2t}$ mamy

$$x(t) \sim e^{-t/2} \left(a_0 e^{-ie^t/\epsilon} + b_0 e^{ie^t/\epsilon} \right) = e^{-t/2} \left(\alpha_0 \cos\left(\frac{e^t}{\epsilon}\right) + \beta_0 \sin\left(\frac{e^t}{\epsilon}\right) \right).$$

Ćwiczenia

1. Znajdź rozwiązania (z resztą $O(\epsilon^2)$) następujących równań:

- $\ddot{x} + \epsilon \dot{x} - x = 1, x(0) = x(1) = 1;$
- $\ddot{x} + x + x^3 = 0, x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = \epsilon;$
- $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0, x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1;$
- $\dot{x} - x - \epsilon \frac{1}{x} = 0, x(0) = 1.$

2. Znajdź rozwiązania (z resztą $O(\epsilon^2)$) metodą dopasowania rozwinięcia asymptotycznego następujących równań:
- a) $\epsilon \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0, x(0) = 0, x(1) = 1;$
 - b) $\epsilon \ddot{x} + \dot{x} - a = 0, x(0) = 0, x(1) = 1;$
 - c) $\epsilon \ddot{x} + 2\dot{x} + x^2 = 0, x(0) = 0, x(1) = 1;$
 - d) $\epsilon \ddot{x} + (1 + \epsilon)\dot{x} + x = 0, x(0) = 0, x(1) = 1.$
3. Znajdź rozwiązania (z resztą $O(\epsilon^2)$) metodą WKB następujących równań:
- a) $\epsilon^2 \ddot{x} - (1 + t^2)x = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2;$
 - b) $\epsilon^2 \ddot{x} + 4e^{-2t}x = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1.$

Literatura

- [1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.
- [2] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.
- [3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.
- [4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.
- [5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.
- [6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.
- [7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.
- [8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.
- [9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część I*, PWN, Warszawa 1967.
- [10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część II*, PWN, Warszawa 1968.
- [11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.