

13 Równania Painlevé

Rozdział ten jest oparty na książkach E. Hille'a [3], K. Iwasaki, ... [5] i prepryncie B. Ziemiana [11]. Więcej o równaniach Painlevé, a także o ich związkach z klasycznymi funkcjami specjalnymi można znaleźć we wspomnianej książce K. Iwasaki, ... [5].

W przypadku równań liniowych postaci

$$x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \dots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = b(t)$$

rozwiązania mogą mieć osobliwości jedynie tam, gdzie osobliwości mają współczynniki $a_0(t), \dots, a_{m-1}(t), b(t)$. W szczególności osobliwości nie zależą od danych początkowych.

W przypadku równań nieliniowych sytuacja wygląda zupełnie inaczej. Zazwyczaj osobliwości rozwiązań zależą od danych początkowych i nie można z postaci równania wywnioskować ani gdzie osobliwości rozwiązań się pojawiają, ani jakiego są typu. Zilustrujemy ten fakt kilkoma przykładami.

1. Rozwiązaniem równania $\dot{x} = -x^2$ jest $x(t) = \frac{1}{t-c}$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. Zauważmy, że w punkcie $t_0 = c$ rozwiązanie ma osobliwość — biegun pierwszego rzędu.
2. Rozwiązaniem równania $m\dot{x}x^{m-1} = 1$ ($m \in \mathbb{N}$) jest $x(t) = \sqrt[m]{t-c}$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. Zatem dla $t_0 = c$ rozwiązanie ma osobliwość — algebraiczny punkt rozgałęzienia.
3. Rozwiązaniem równania $\ddot{x} + \dot{x}^2 = 0$ jest $x(t) = \ln(t - c_1) + c_2$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. W punkcie $t_0 = c_1$ rozwiązanie ma osobliwość — niealgebraiczny punkt rozgałęzienia.
4. Rozwiązaniem równania $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)\right)^2 + 4\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^3 = 0$ jest $x(t) = c_2 e^{\frac{1}{t-c_1}}$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. W punkcie $t_0 = c_1$ rozwiązanie ma osobliwość — jest to punkt istotnie osobliwy.

Rozważmy *algebraiczne* równanie różniczkowe

$$(13.1) \quad x^{(m)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}) = 0$$

tnz. takie, że F jest wielomianem względem $x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}$ o meromorficznych współczynnikach.

Definicja 13.1 Mówimy, że równanie różniczkowe (13.1) jest *bez ruchomych punktów rozgałęzienia* (odpowiednio *bez ruchomych punktów istotnie osobliwych*) jeśli rozwiązania (13.1) nie mają punktów rozgałęzienia (odpowiednio punktów istotnie osobliwych), które zmieniają swoją pozycję przy zmianie danych początkowych.

Definicja 13.2 Mówimy, że równanie różniczkowe algebraiczne (13.1) ma *własność Painlevé* jeśli jest bez ruchomych punktów rozgałęzienia i bez ruchomych punktów istotnie osobliwych.

Problem: Znaleźć wszystkie algebraiczne równania różniczkowe mające własność Painlevé.

Dla $m = 1$ L. Fuchs i H. Poincaré wykazali, że każde równanie różniczkowe algebraiczne mające własność Painlevé da się przez odpowiednią transformację (zamiannę zmiennych) sprowadzić do równania Riccatiego $\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, gdzie $a(t), b(t), c(t)$ są analityczne. Jeśli dopuścimy równania, w których $x^{(m)}$ występuje w potęgze wyższej niż jeden, to dostajemy również równania mające własność Painlevé, które dadzą się sprowadzić do równania Weierstrassa $\dot{x}^2 = 4x^3 - ax - b$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ (jego rozwiązaniem jest funkcja eliptyczna Weierstrassa).

Sytuacja się komplikuje, gdy rozważamy równania rzędu $m \geq 2$. W rozwiązaniach algebraicznych równań różniczkowych rzędu 1 pojawiają się jedynie ruchome punkty rozgałęzienia, a w równaniach rzędu $m \geq 2$ pojawiają się również ruchome punkty istotnie osobliwe.

Dla $m = 2$ powyższy problem postawił w 1887 roku E. Picard, a rozwiązanie znalazł na przełomie XIX i XX wieku Paul Painlevé (1863–1933). Znalazł on 50 możliwych typów równań, które spełniają tę własność. Większość z tych typów równań (44) sprowadza się do równań całkowalnych przez kwadratury, równań liniowych lub równań prowadzących do funkcji eliptycznych. Oprócz tego problem rozwiązuje 6 typów równań, których rozwiązania nie da się wyrazić za pomocą znanych funkcji.

Sześć typów równań, które obecnie noszą nazwę *równań Painlevé*, to:

$$P_I \quad \ddot{x} = 6x^2 + t$$

$$P_{II} \quad \ddot{x} = 2x^3 + tx + a$$

$$P_{III} \quad \ddot{x} = \frac{1}{x}(\dot{x})^2 - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{ax^2+b}{t} + cx^3 + \frac{d}{x}$$

$$P_{IV} \quad \ddot{x} = \frac{1}{x}(\dot{x})^2 + \frac{3}{2}x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - a)x + \frac{b}{x}$$

$$P_V \quad \ddot{x} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1}\right)(\dot{x})^2 - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{(x-1)^2}{t^2}\left(ax + \frac{b}{x}\right) + \frac{cx}{t} + \frac{dx(x+1)}{x-1}$$

$$P_{VI} \quad \ddot{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t}\right)(\dot{x})^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{x-t}\right)\dot{x} + \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2}\left(a - \frac{bt}{x^2} + c\frac{t-1}{(x-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - d\right)\frac{t(t+1)}{(x-t)^2}\right).$$

Postać równań $P_I - P_{III}$ znalazł Painlevé, równań $P_{IV} - P_V$ jego uczeń B. Gambier, a najbardziej ogólne równanie P_{VI} znalazł R. Fuchs (syn Lazarusa Fuchsa). Rozwiązania tych równań tworzą całkiem nową klasę funkcji, które pojawiają się np. przy rozwiązywaniu nieliniowych równań cząstkowych całkowicie całkowalnych. Obecnie rozwiązania równań Painlevé uważa się — podobnie jak funkcje hipergeometryczne, Bessela, Legendre’a, Kummera, itd — za funkcje specjalne.

Dla równań rzędu $m \geq 3$ problem znalezienia i klasyfikacji wszystkich równań mających własność Painlevé jest wciąż nierozwiązany.

Postaramy się teraz przyjrzeć rozwiązaniu równania Painlevé P_I : $\ddot{x} = 6x^2 + t$. Będziemy szukać rozwiązania w postaci szeregu Laurenta $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^{\alpha_n}$, gdzie α_n jest rosnącym ciągiem liczb całkowitych i $\alpha_0 < 0$, $a_n \neq 0$. Wstawiając do równania P_I dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\alpha_n - 1)a_n(t-t_0)^{\alpha_n-2} = 6\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^{\alpha_n}\right)^2 + t_0 + (t-t_0).$$

Porównując składniki najniższego rzędu (dla $n = 0$) dostajemy $\alpha_0(\alpha_0 - 1)a_0(t-t_0)^{\alpha_0-2} = 6a_0^2(t-t_0)^{2\alpha_0}$. Stąd mamy, że $\alpha_0 - 2 = 2\alpha_0$ (czyli $\alpha_0 = -2$) i $6a_0 = 6a_0^2$ (czyli $a_0 = 1$.)

Kolejne składniki (dla $n = 1$) dają równanie $\alpha_1(\alpha_1 - 1)a_1(t-t_0)^{\alpha_1-2} = 12a_1(t-t_0)^{\alpha_1-2} + t_0$. Jeśli $t_0 \neq 0$ składniki po prawej stronie są tego samego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = 2$. Dostajemy wtedy również, że $2a_1 = 12a_1 + t_0$, a stąd $a_1 = -\frac{1}{10}t_0$.

Dla $n = 2$ dostajemy $\alpha_2(\alpha_2 - 1)a_2(t-t_0)^{\alpha_2-2} = 12a_2(t-t_0)^{\alpha_2-2} + (t-t_0)$. Rozwiązaniem jest $\alpha_2 = 3$ i $a_2 = -\frac{1}{6}$.

Dla $n = 3$ mamy równanie $\alpha_3(\alpha_3 - 1)a_3(t-t_0)^{\alpha_3-2} = 12a_3(t-t_0)^{\alpha_3-2}$. Rozwiązaniem jest $\alpha_3 = 4$ i $a_3 = h$, gdzie $h \in \mathbb{C}$ jest dowolną liczbą zespoloną.

Postępując tak dalej dostajemy, że wszystkie wykładniki α_n są całkowite i $\alpha_n \geq n + 1$ dla $n > 0$. W końcu dostajemy

$$(13.2) \quad x(t) = (t-t_0)^{-2} - \frac{1}{10}t_0(t-t_0)^{-1} - \frac{1}{6}(t-t_0)^0 + h(t-t_0)^1 + \frac{1}{300}t_0^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{150}t_0(t-t_0)^3 + \dots$$

Pokażemy, że szereg ten jest zbieżny. W tym celu wybierzmy liczbę $M > 1$ taką, że $|t_0| < 10M$, $|h| < M^3$. Wówczas również $|a_n| < M^n$ dla $0 \leq n \leq 5$. Dalsze współczynniki a_n szacujemy korzystając z zależności rekurencyjnej

$$(13.3) \quad (\alpha_n(\alpha_n - 1) - 12)a_n = 6 \sum_{j,k} a_j a_k,$$

gdzie $j, k \in \mathbb{N}$, $j, k < n$, $j + k \leq n$ są takie, że $\alpha_j + \alpha_k = \alpha_n - 2$. Równość (13.3) wynika z porównania składników rzędu n :

$$\alpha_n(\alpha_n - 1)a_n(t-t_0)^{\alpha_n-2} = 12a_n(t-t_0)^{\alpha_n-2} + 6 \sum_{j,k} a_j a_k (t-t_0)^{\alpha_n-2},$$

gdzie j, k takie, że $\alpha_j + \alpha_k = \alpha_n - 2$, $\alpha_j \geq 2$, $\alpha_k \geq 2$.

Suma z prawej strony (13.3) zawiera co najwyżej $n-1$ składników (bo $1 \leq j \leq n-1$ i dla ustalonego j znajdziemy tylko jedno k takie, że $\alpha_j + \alpha_k = \alpha_n - 2$). Zauważmy również, że z faktu $\alpha_n \geq n+1$ wynika oszacowanie $\alpha_n(\alpha_n - 1) - 12 \geq (n+4)(n-3)$. Wobec tego, korzystając z (13.3) możemy indukcyjnie szacować współczynniki a_n dla $n \geq 6$:

$$|a_n| \leq \frac{6(n-1)M^n}{(n+4)(n-3)} \leq M^n.$$

Zatem szereg (13.2) jest zbieżny dla $0 < |t-t_0| < M^{-1}$ i jest w tym nakłutym dysku rozwiązaniem równania Painlevé. Wykazaliśmy więc, że rozwiązanie P_I jest funkcją meromorficzną z podwójnym biegunem.

Równania Painlevé dopuszczają osobliwości (poza biegunami) jedynie w następujących punktach: $P_I \rightarrow \infty$, $P_{II} \rightarrow \infty$, $P_{III} \rightarrow 0, \infty$, $P_{IV} \rightarrow \infty$, $P_V \rightarrow 0, \infty$, $P_{VI} \rightarrow 0, 1, \infty$.

Równania $P_I \rightarrow P_V$ można uzyskać z P_{VI} za pomocą pewnego procesu granicznego. Przed sformułowaniem tego wyniku wprowadźmy jeszcze jedno pomocnicze równanie Painlevé (powstałe z P_{III} poprzez zamianę zmiennych):

$$P_{III'} \quad \ddot{x} = \frac{1}{x}\dot{x}^2 - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{x^2}{4t^2}(cx + a) + \frac{b}{4t} + \frac{d}{4x}.$$

Stwierdzenie 13.3 *Równania $P_I \rightarrow P_V$ są uzyskane z P_{VI} poprzez następujące podstawienia i przejścia graniczne:*

1. $P_{VI} \rightarrow P_V$: $t \mapsto 1 + \epsilon t$, $b \mapsto -b$, $c \mapsto d\epsilon^{-2} + c\epsilon^{-1}$, $d \mapsto -d\epsilon^{-2}$ ($\epsilon \rightarrow 0$).
2. $P_V \rightarrow P_{IV}$: $t \mapsto 1 + \sqrt{2}\epsilon t$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon x$, $a \mapsto \frac{1}{2}\epsilon^{-4}$, $b \mapsto \frac{1}{4}b$, $c \mapsto -\epsilon^{-4}$, $d \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-4} + a\epsilon^{-2}$ ($\epsilon \rightarrow 0$).
3. $P_{IV} \rightarrow P_{II}$: $t \mapsto -\epsilon^{-3}(1 - 2^{-2/3}\epsilon^4 t)$, $x \mapsto \epsilon^{-3}(1 + 2^{2/3}\epsilon^2 x)$, $a \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-6} - 2a$, $b \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-12}$ ($\epsilon \rightarrow 0$).
4. $P_V \rightarrow P_{III'}$: $t \mapsto t$, $x \mapsto 1 + \epsilon x$, $a \mapsto \frac{1}{8}\epsilon^{-2}c + \frac{1}{4}\epsilon^{-1}a$, $b \mapsto -\frac{1}{8}\epsilon^{-2}c$, $c \mapsto \frac{1}{4}\epsilon b$, $d \mapsto \frac{1}{8}\epsilon^2 d$ ($\epsilon \rightarrow 0$).
5. $P_{III'} \rightarrow P_{III}$: $t \mapsto t^2$, $x \mapsto tx$.
6. $P_{III} \rightarrow P_{II}$: $t \mapsto 1 + \epsilon^2 t$, $x \mapsto 1 + 2\epsilon x$, $a \mapsto -\frac{1}{2}\epsilon^{-6}$, $b \mapsto \frac{1}{2}\epsilon^{-6}(1 + 4a\epsilon^3)$, $c \mapsto \frac{1}{4}\epsilon^{-6}$, $d \mapsto -\frac{1}{4}\epsilon^{-6}$ ($\epsilon \rightarrow 0$).
7. $P_{II} \rightarrow P_I$: $t \mapsto -6\epsilon^{-10}(1 - \frac{1}{6}\epsilon^{12}t)$, $x \mapsto \epsilon^{-5}(1 + \epsilon^6 x)$, $a \mapsto 4\epsilon^{-15}$ ($\epsilon \rightarrow 0$).

Dowód. Obliczenia wynikłe z przedstawionych podstawień prowadzą nas z jednego równania do drugiego. Dla ustalenia uwagi wykażemy przejście $P_{VI} \rightarrow P_V$ (pozostałe pokazują się w ten sam sposób).

Niech $t = 1 + \epsilon t_1$, $b = -b_1$, $c = d_1\epsilon^{-2} + c_1\epsilon^{-1}$, $d = -d_1\epsilon^{-2}$. Wówczas równanie P_{VI} : $\frac{d^2x}{dt^2} = R(t, x, \frac{dx}{dt})$ przechodzi na $\frac{d^2x}{dt_1^2} = \epsilon^2 R(1 + \epsilon t_1, x, \epsilon^{-1} \frac{dx}{dt_1})$, gdyż $\frac{dx}{dt_1} = \epsilon \frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt_1^2} = \epsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2}$.

Biorąc $\epsilon \rightarrow 0$ dostajemy równanie P_V względem zmiennych t_1, x . □

Ze Stwierdzenia 13.3 wynika, że najbardziej ogólną formą równania Painlevé jest P_{VI} , gdyż z niego da się otrzymać wszystkie inne równania. Okazuje się, że szóste równanie Painlevé ma również inne ciekawe własności.

Stwierdzenie 13.4 *Szóste równanie Painlevé P_{VI} ma grupę symetrii, która jest generowana przez następujące transformacje:*

1. $T_1: x \mapsto 1 - x$, $t \mapsto 1 - t$ $l_1: (a, b, c, d) \mapsto (a, c, b, d)$.
2. $T_2: x \mapsto \frac{1}{x}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ $l_2: (a, b, c, d) \mapsto (b, a, c, d)$.
3. $T_3: x \mapsto \frac{x-t}{1-t}$, $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ $l_3: (a, b, c, d) \mapsto (a, d, c, b)$.

Dowód. Wynika z bezpośrednich wyliczeń. Dokonując przedstawionych zamian zmiennych (podobnie jak w dowodzie Stwierdzenia 13.3) dostajemy te same równanie P_{VI} , gdy zamiast (a, b, c, d) weźmiemy $l_i(a, b, c, d)$ ($i = 1, 2, 3$). □

Ćwiczenia

1. Wykaż, że $\alpha_4 = 6$, $a_4 = \frac{1}{300}t_0^2$ oraz $\alpha_5 = 7$ i $a_5 = \frac{1}{150}t_0$ w rozwinięciu w szereg Laurenta rozwiązania P_I .
2. Wykaż, że rozwiązanie P_I może mieć zero rzędu 3 w $t = t_0$ wtedy i tylko wtedy gdy $t_0 = 0$.
3. Znajdź pierwsze wyrazy rozwinięcia w szereg Laurenta rozwiązań równań:
 - a) $\ddot{x} = 2x^3 + t$,
 - b) $\ddot{x} = 3x^2 + t$.
4. Uzupełnij dowody Stwierdzeń 13.3 i 13.4.

Literatura

- [1] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, *The Riemann–Hilbert Problem*, Vieweg, Wiesbaden 1994.
- [2] W. Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 2000.
- [3] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, New York 1976.
- [4] M. Holmes, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, New York 1995.
- [5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Vieweg, Braunschweig 1991.
- [6] R. O'Malley, *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York 1991.
- [7] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1999.
- [8] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, New York 1965.
- [9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część I*, PWN, Warszawa 1967.
- [10] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *Kurs analizy współczesnej. Część II*, PWN, Warszawa 1968.
- [11] B. Ziemian, *20 lectures on ordinary and differential equations. Geometric methods of complex analysis*, preprint, IM PAN, Warszawa 1992.