

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą szeregów potęgowych
Zakres materiału na egzamin

1. Co to są punkty osobliwe, osobliwe regularne i osobliwe nieregularne danego równania. Umiejętność ich znajdowania.
2. Metoda redukcji rzędu równania (Stwierdzenie 1.3) wraz z dowodem. Umiejętność stosowania do równań.
3. Twierdzenie 1.4 wraz ze szkicem dowodu.
4. Znajdowanie rozwiązań równań za pomocą rozwijania w szereg potęgowy wokół punktu nieosobliwego.
5. Twierdzenie 2.1 wraz ze szkicem dowodu.
6. Znajdowanie rozwiązań równań metodą rozwijania w szeregi Frobeniusa wokół punktów regularnych osobliwych (przypadki bez logarytmów).
7. Znajdowanie rozwiązań równań metodą rozwijania w szeregi Frobeniusa wokół punktów regularnych osobliwych (przypadki z logarytmami).
8. Badanie punktów w nieskończoności (cały rozdział 3.1) wraz z umiejętnością sprawdzenia, czy punkt w nieskończoności jest nieosobliwy, osobliwy regularny czy nieregularny,
9. Znajdowanie rozwiązań metodą szeregów potęgowych i szeregów Frobeniusa wokół punktu w ∞ .
10. Równanie hipergeometryczne, jego punkty osobliwe i rozwiązania wokół zera. Funkcja hipergeometryczna i wyrażanie za jej pomocą innych funkcji.
11. P -równanie Riemanna i jego sprowadzenie do równania hipergeometrycznego.
12. Lemat Barnes'a wraz ze szkicem dowodu.
13. Stwierdzenie 4.4 wraz z dowodem.
14. Równanie Legendre'a, jego punkty osobliwe i rozwiązania. Sprowadzenie do równania hipergeometrycznego.
15. Wielomiany Legendre'a — co to jest, przedstawienia za pomocą wzoru Rodriguesa i całki Schläfliego (jedno wybrane z dowodem).
16. Ortogonalność wielomianów Legendre'a z dowodem i jeden wybrany wzór rekurencyjny (spośród I i II str. 15) z dowodem.
17. Konfluentne równanie hipergeometryczne, jego punkty osobliwe i rozwiązania (ćwiczenie 1 str. 19), związek ze zwykłym równaniem hipergeometrycznym, konfluentna funkcja hipergeometryczna.
18. Wielomiany Laguerre'a i ich własności (również wzór z ćwiczenia 3 str. 19), jedno wybrane z ćwiczeń 2–4 str. 19.
19. Stwierdzenie 6.3 z dowodem i jego zastosowania do wyrażania funkcji specjalnych.
20. Równanie Bessela, jego punkty osobliwe i rozwiązania wokół zera, funkcje Bessela (pierwszego rodzaju), któraś z zależności rekurencyjnych (7.5) wraz z dowodem.
21. Zmodyfikowane równanie Bessela i jego związek z równaniem Bessela, jego punkty osobliwe i rozwiązania wokół zera, zmodyfikowane funkcje Bessela (pierwszego rodzaju) i ich związek z funkcjami Bessela.
22. Stwierdzenie 7.3 z dowodem. Stwierdzenie 7.4 wraz z dowodem co najmniej pięciu ze wzorów (7.10)–(7.17).
23. Przedłużenie analityczne i sformułowanie problemu Riemanna–Hilberta.
24. Konstrukcja grupy podstawowej homotopii — przykłady.
25. Konstrukcja grupy monodromii — przykłady.

26. Definicja rozwinięcia asymptotycznego (w sensie Poincaré) i stwierdzenie o jednoznaczności rozwinięć asymptotycznych (z dowodem). Czy rozwinięcie asymptotyczne w sposób jednoznaczny wyznacza funkcję? O czym mówi Twierdzenie Ritta?
27. Własności algebraiczne rozwinięć asymptotycznych (wybrana własność z dowodem).
28. Własności analityczne rozwinięć asymptotycznych (wybrana własność z dowodem).
29. Co to są szeregi Gevreya (przykłady) i rozwinięcia asymptotyczne Gevreya. Podaj twierdzenie Ritta dla asymptotyki Gevreya i lemat Watsona.
30. Procedura 1-sumowalności w sensie Borela. Formalna transformacja Borela (rzędu 1), transformacja Laplace'a (rzędu 1) i związek pomiędzy nimi. Definicja 1-sumowalności w kierunku d i 1-sumowalności dla szeregów formalnych.
31. Definicja diagramu Newtona, wielokąta Newtona i niezmiennika Katza oraz umiejętność ich wyliczania i rysowanie dla danych równań liniowych jednorodnych.
32. Na czym polega zjawisko Stokesa? Co to są linie Stokesa i Anty-Stokesa?
33. Co to są perturbacje regularne? Umiejętność znajdowania rozwiązań w zależności od małego parametru ϵ .
34. Co to są perturbacje osobliwe? Umiejętność znajdowania rozwiązań wybraną metodą (dopasowania rozwinięcia asymptotycznego lub WKB).
35. Wyjaśnij pojęcia: równania bez ruchomych punktów rozgałęzienia, równania bez ruchomych punktów istotnie osobliwych, własność Painlevé, równania Painlevé.
36. Umiejętność znajdowania rozwiązań równań nieliniowych w postaci szeregu Laurenta (znajdowanie kilku pierwszych wyrazów tego szeregu).